Τιμι: 85 κ.
Δεςιμο 35 κ.

Цена 85 к.
Переплет 35 к

На греческом языке

И. ПОПОВ

АРИФМЕТИКА

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

склад издания:
Московская 53, Ростов н-Д
КНИГОЦЕНТР

Ι. ΠΟΠΟΦ

ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΙ

ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΣΕΟ ΣΚΟΛΙΟ

ΕΚΔΟΤΙΚΟ «ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ»
ΡΟΣΤΟΒ-ΝΤΟΝ
1935

ΤΑ ΚΙΡΙΟΤΕΡΑ ΠΑΡΑΤ/ΠΟΜΑΤΑ.

ΣΕΛ.	ΣΙΡΑ	ΑΝΤΙ	ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΤΙ
4	1 απο κάτο	τάκςις	ςιρας
5	3	τάκςις	ςιρας
8	9 απο κάτο	τι	το
8	5 „ „	δεχτι —	δεχτι απ'τιν επιςτìμι
18	10 „ „	140	240
18	3 „ „	αποθικèματα	αποθèματα
27	16 „ „	τα	το
32	2 „ „	τος	τις
47	5 „ „	διερέτι τòτε,	διερέτι, τòτε
52	8 „ „	Διερετòτιτα τον αριθμον	VI Διερετότιτα τον αριθμον
57	11	633729135	63729135
67	13	παρέχι	περιέχι
74	10 απο κάτο	ποςο	πος ο
77	8 „ „	$\frac{}{7}$	$\frac{4}{7}$
79	10–11 „ „	κλάζμα —	κλάζμα $\frac{9}{20}$
98	6	αντικαςτìςυμε	αντικαταςτìςυμε
100	6	ςινάγυμε	ςιμπερένυμε
100	5 απο κάτο	11 : 1	12 : 1
103	8 „ „	τιν	ςτιν
105	4	μεταβάλυμε	μεταβάλυνε
109	4	2,0,5	2,05
110	14	τι	τιν
111	16	,2.7	3,2.7
113	18 απο κάτο	τον αριθμο,	ο αριθμος
115	5 „ „	παρανομαςτι	παρονομαςτι
115	1 „ „	αμιθμιτι	αριθμιτι
116	5 „ „	δέκατυ	χιλιοςτυ
120	16 „ „	οφιλιμότερο	οφελιμότερο
123	15—16 „ „	ο λόγος	το λòγο
124	3	ςοςτο	ςοςτι
124	5—6	τυς όρυς	τυς διο όρυς
124	18	x	X
132	11	ατςάλι	ατςαλιυ
134	3	ιςùμε	ιςύτε
137	3	εφκολονóιτο	εφκολονòιτι
143	2 απο κάτο	αντίςτροφα, ανάλογος	αντιςτρόφος ανάλογα

Ι. ΠΟΠΟΦ

ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΙ

ΓΙΑ ΤΑ ΜΕΣΕΑ ΣΚΟΛΙΑ

ΠΕΜΤΙ ΤΑΚΣΙ

Επικιρόθικε
απ' το ΛΚΠ τις ΡΣΟΣΔ

Δέφτερι έκδοςι

Μετάφραςι: Δ. Κ. ΚΑΖΑΝΤΖΙ

Ι μετάφραςι επικιρόθικε
απ' το διεφθιντι
το Αζοβο-Τςτερν. Κραι ΟΝΟ

ΕΚΔΟΤΙΚΟ „ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ"
ΡΟΣΤΟΒ-ΝΤΟΝ
1935

ΠΡΟΛΟΓΟΣ*

Στιν έκδοςι αφτι, ςε ςίνκριςι με τι δέφτερι πυ βγίκε το 1933 με τι ςίντàκςι το Ε. Σ. Μπερεζάνςκι, ιςάχτικαν μερικες αλαγες, βαςιζμένες ςτιν εκςàμινι πίρα τις εφαρμογις τυ διδαχτικυ αφτυ βιβλίυ ςτο μεςέο ςκολιο.

Ι αλαγες αφτες ένκιντε ςτα ακόλυθα: Ι έκθεςι τυ ιλικυ ςε πολα μέρι απλοπιίθικε τὸςο απο άποψι γλὸςας, ὸςο κε περιεχόμενυ. Ι κανόνες για τι διεκςαγογι τον πράκςεον δίδοντε ος ςιμπέραςμα, πυ άμεςα πιγάζι απ' τιν προιγιθίςα έκθεςι τυ ιλικυ. Παραλίφτικαν μερικες λεπτομέριες, πυ δεν έχυν υςιόδικι ςιμαςìα, τα πιο δε δίςκολα παραδίγματα κε προβλìματα αντικαταςτίθικαν με πιο έφκολα.

Ϛιρα αλαγον ιςάχτικε ςτα κεφàλεα για τα κινα κε δεκαδικα κλάζματα, ιδìος ςτον πολαπλαςιαζμο τον κλαζμάτον: γένικαν ςιμπλιρὸςις ςτα άρθρα για το μέςο αριθμιτικο κάμποςον αριθμον, για τυς ανàλογυς αριθμυς κε àλα.

Ι τρìτι έκδοςι τυ διδαχτικυ βιβλίυ βγένι με τι ςίνταkςι τυ καθιγιτι Ι. Ι. Τςιςτιακοφ.



* Ο πρόλογος αφτος έγινε ςτι ροςικι έκδοςι, τυ 1934.

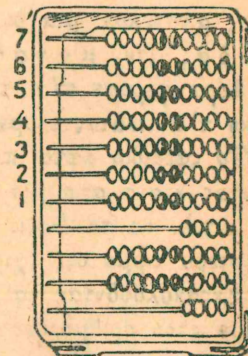
Ι. ΓΡΑΦΙ ΚΕ ΑΠΑΝΚΕΛΙΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Ιςαγογι. Ι αριθμιτικι ìνε επιςτίμι, πυ καταγίνετε με τυς αριθμυς, τις ιδιότιτές-τυ; κε τις πρàκςις πυ κάνυμε μ' αφτυς.

Ι αριθμιτικι ὲχι τιν αρχί-τις απο τότε, πυ ι άνθροπι έμαθαν να μετράνε, πυ άρχιςαν να καταλαβένυν τι μονάδα ςαν ιδιέτερο αντικίμενο τις μέτριςις. Ϛπυδάζοντας τα διάφορα μνιμία, πυ μας έμιναν απ' τυς ανθρόπυς, ι οπίι έζιςαν ςτα παλια χρόνια κε ςινάμα τις επιγραφες τον μνιμίον αφτον, μπορύμε να πύμε, πός μετρύςαν ι άνθροπι πριν· δεν μπορύμε όμος να ιπόδιχςυμε, πιος απ' τυς γνοςτυς ς' εμας λαυς ὲβαλε τις αρχες τις αριθμιτικις.

§ 2. Φιςικι ςιρα τον αριθμον. Ι λέκςι «ένα», «μονάδα» χριςιμοπιίτε για παράςταςι ενος οπιυδίποτε αντικιμένυ. Οταν θέλυμε να παραςτίςυμε με αριθμυς το ςίνολο τον αντικιμένον, τότε πρὲπι να μετρίςυμε.

Για να μετρίςυμε τα αντικίμενα, πρέπι πρότα να πάρυμε ένα αντικίμενο, ὲπιτα κοντά τυ να βάλυμε ακόμα ένα, ςτο ςίνολο αφτον τον αντικιμένον προςθέτυμε ακόμα ένα κε υ.κ., βαθμιδον ςχιματίζοντε: 1) ένα αντικίμενο, 2) ένα κε ένα αντικìμενο, 3) ένα κε ένα κε ὲνα αντικίμενο κε υ. κ. Ϛτι θέςι τις λέκςις ένα κε ένα μεταχιρίζοντε τι λέκςι δ ί ο, αντις να πύμε έ ν α, έ ν α κε έ ν α—λέμε τι λέκςι τ ρ ί α κε υ.κ. Ϛχιματίζετε φιςικι ςιρα αριθμον: ένα, δίο, τρία τέςερα... Ο μικρότερος αριθμος ςτι ςιρα αφτι ίνε ι μονàδα. Τι ςιρα τύτι μπορύμε ανάλογα με τις ανάνκες-μας να τιν εκςακολυθίςυμε όςο θέλυμε, χορις τέλος. Ι ςιρα αφτι δεν έχι τελεφτέο, πιο μεγάλο αριθμο, επιδι κε ςτον τελεφτέο αριθμο τις ςιρας αφτις μπορύμε να προςθὲςυμε μια μονάδα κε τότε θὰχυμε νεο αριθμο, ακόμα μεγαλίτερο.



Ι μὲτριςι μας χριάζετε τότε, όταν έχυμε ςίνολα αντικιμένον, πολα αντικίμενα μαζι. Ο αριθμος ςχιματίζετε ςαν αποτέλεςμα τις μέτριςις

Ο ακέρεος αριθμος εκφράζι το ςίνολο κάμποςον μονάδον, ίτε μιας μονάδας.

Με τι μέτριςι αναπτίχθικε ςτον άνθροπο ι δινατότιτα να καταλάβι τις λέκςις: *ί ς ο ς*, *μ ε γ α λ ί τ ε ρ ο ς*, *μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς* κε οδίγιςε ςτο ςχιματιζμο τις **φιςικις ςιρας τον αριθμον.**

Ι φιςικι ςιρα τον αριθμον: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Στυς πρότυς δέκα αριθμυς δόςανε τις ονομαςίες *έ ν α*, *δ ί ο*, *τ ρ ί α*... *δ έ κ α*. Με τι βοίθια αφτον τον δέκα ονομαςιον κε ακόμα κάμποςον άλον ςχιματίζυντε ι ονομαςίες όλον τον αριθμον.

Πρότι φορα κάθε ιδιέτερο αντικίμενο παραςτένονταν με τελία ίτε με γραμύλα. Αφτο όμος ίτανε ακατάλιλο ςε κίνες τις περιπτόςις, πυ ο αριθμος, τον μετριμένον αντικιμένον, ίτανε μεγάλος. Για το ςίνολο πολον μονάδον εφεβρέθικαν ιδιέτερα ςιμία.

Με τον κερο άλαζαν κε τα αριθμιτικα ςιμία τι μορφί-τυς. Τα ςιμία πυ μεταχιριζόμαςτε εμις, ονομάζυντε αραβικα ψιφία, επιδι ιποθέτυν, πος αφτα τα ψιφία τα δανίςτικαν ι εβροπέι απο τυς άραβες.

Βαθμιδον ι άνθροπι έμαθαν να εποφελύντε ολίγα ςιμία για να γράψυν όλυς τυς αριθμυς.

§ 3. Προφορικι μέτριςι κε δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις.

Θα ςχιματίςυμε πάνο ςτον αριθμιτίρα αριθμυς με φιςικι ςιρα. Ας αρχίςυμε απο το ςίρμα εκίνο πυ πάνο ςτιν πρότι ικόνα ίνε ςιμιομένο ος πρότο (1). Μετρόντας κε κςεχορίζοντας τα ςφερίδια, τα φέρυμε απο ένα, ένα ςτα αριςτερα: ένα, δίο, τρία, τέςερα, πέντε, εκςι, εφτα, οχτο, ενέα, δέκα.

Πίραμε δέκα *μ ο ν ά δ ε ς π ρ ό τ ι ς ς ι ρ α ς*, ίτε όπος τις ονομάζυν αλιότικα, δέκα *α π λ ε ς μ ο ν ά δ ε ς*. Αφτες ι δέκα απλες μονάδες αποτελυν μια δεκάδα απλον μονάδον. Αφτι θα τιν ονομάςυμε *δ ε κ ά δ α*, ίτε *μ ο ν ά δ α δ έ φ τ ε ρ ι ς ς ι ρ α ς*.

Τόρα φέρυμε πίςο τα δέκα ςφερίδια τυ πρότυ ςίρματος τυ αριθμιτίρα κε τ' αντικαταςτένυμε με ένα ςφερίδι τυ δέφτερυ ςίρματος.

Το ςφερίδιο αφτο παραςτένι τι μονάδα τις δέφτερις ςιρας. Προςθέτοντας κςανα απο μια μονάδα, ςχιματίζυμε τυς αριθμυς: ένδεκα, δόδεκα, κ.τ.λ. ος τα ίκοςι. Αντικαθιςτόντας τι δεκάδα, ακόμα μ'άλο ςφερίδιο τυ δέφτερυ ςίρματος, ςχιματίζυμε διο μονάδες τις δέφτερις ςιρας.

Εκςακολυθόντας να μετράμε τα ςφερίδια με τον ίδιο τρόπο θα φτάςυμε ςτον αριθμο εκατο, ςτον οπίο θα αντιςτιχυν δέκα ςφερίδια τυ δεφτέρυ ςίρματος. Ετςι ςχιματίςαμε *ε κ α τ ο ν τ ά δ α* — διλ. *μ ο ν ά δ α τ ι ς τ ρ ί τ ι ς ς ι ρ α ς*.

Δέκα ςφερίδια τυ δέφτερυ ςίρματος θα αντικαταςτιθύνε πάνο ςτον αριθμιτίρα μ' ένα ςφερίδιο τυ τρίτυ ςίρματος. Εκςακολυθόντας κε πάλι τι μέτριςι θα φτάςυμε ςτις δέκα εκατοντάδες, ος τα χίλια.

Εμις μετρίςαμε όλες τις μονάδες τις *π ρ ό τ ι ς τ ά κ ς ι ς*.

Βλέπυμε, πος δέκα μονάδες τις πρότις ςιρας αποτελυν μια μονάδα τις δέφτερις ςιρας, δέκα μονάδες τις δέφτερις ςιρας αποτελυν μια μονάδα τις τρίτις τάκςις. Δέκα μονάδες τις τρίτις ςιρας αποτελυν μια μονάδα τις τέταρτις ςιρας. Καθεμια μονάδα τις ακόλυθις ςιρας περιέχι δέκα μονάδες προιγύμενις κατότερις ςιρας. Γι' αφτο κε το ςίςτιμά-μας ονομάζετε **δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις.**

Ι τρις πρότες ςιρες αποτελυν **τιν πρότι τάκςι—τιν τάκςι τον μονάδον.** Ι τάκςι τον μονάδον αποτελίτε απο τρις ςιρες: τον μονάδον, δεκάδον κε εκατοντάδον.

Μετρόντας παρακάτο, περνάμε ςτις μονάδες *τ ι ς δ έ φ τ ε ρ ι ς τ ά κ ς ι ς*: θα μετρίςυμε κατα χιλιάδες, δεκάδες χιλιαδον κε εκατοντάδες χιλιάδον. Ι χιλιάδες, ι δεκάδες τον χιλιάδον κε ι εκατοντάδες τον χιλιάδον ςχιματίζυν τι **δέφτερι τάκςι—τιν τάκςι τον χιλιάδον.**

Τι χιλιάδα τον χιλιάδον, ίτε το εκατομίριο το πέρνυν ος μονάδα *τ ι ς τ ρ ί τ ι ς τ ά κ ς ι ς*, ι οπία επίςις περιέχι τρις ςιρες: τα εκατομίρια (τις μονάδες τον εκατομιρίον), τις δεκάδες τον εκατομιρίον, τις εκατοντάδες τον εκατομιρίον.

Κατόπιν ακολυθι **ι τάκςι τον διςεκατομιρίον—ι τέταρτι τάκςι, ι τάκςι τον τριςεκατομιρίον — ι πέμτι τάκςι.**

Ετςι ςτο δεκαδικο ςίςτιμα τις αρίθμιςις:

1) δέκα μονάδες κάθε ςιρας αποτελυν τιν μονάδα τις ακόλυθις ανότερις ςιρας.

2) Ι ςιρες ςινενόνυντε ςε τάκςις· κάθε τάκςι αποτελίτε απο μονάδες τριον ςιρον.

Ι ςιρα τις μέτριςις τον αριθμον αντιςτιχι με τι ςιρα τυ ακόλυθυ πίνακα:

5-ι τάκςι	4-ι τάκςι	3-ι τάκςι — εκατομίρια			2-ι τάκςι— χιλιάδες			1-ι τάκςι— μονάδες		
Τριςεκατομίρια	Διςεκατομίρια	9-ι ςιρα—εκατοντάδες τον εκατομιρίον	8-ςιρα—δεκάδες τον εκατομιρίον	7-ι ςιρα—μονάδες τον εκατομιρίον	6-ι ςιρα—εκατοντάδες τον χιλιάδον	5-ι ςιρα—δεκάδες τον χιλιάδον	4-ι ςιρα—μονάδες τον χιλιάδον	3-ι ςιρα—εκατοντάδες	2-ι ςιρα—δεκάδες	1-ι ςιρα—μονάδες

§ 4. Αρίθμιςι.

Ολι ι αριθμι γράφυντε με τι βοίθια, ολίγον ςιμίον. Τα ςιμία αφτα ονομάζυντε **πςιφία**. Ολα τα πςιφία ίνε δèκα—ενέα ςιμαντικα πςιφία, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, κε ένα πςιφίο 0—το μιδενικο.

Για να ςιμιόςυμε έναν αριθμο με τα πςιφία, γράφυμε τις ςιρες τι μια μετα τιν άλι, αρχίζοντας απ' τιν ανότερι ςιρα έτςι, όςτε ι μονάδες τον ανότερον ςιρον να ςτέκοντε αριςτερότερα απ' τις μονάδες τον κατότερον ςιρον. Εαν δεν έχι μονάδες κάπιας ςιρας ίτε τάκςις τότε ςτι θέςι αφτις τις ςιρας πρέπι να βάζυμε το μιδενικο, ςτι θέςι τις τάκςις τρία μιδενικα.

1. Γράπςαμε τον αριθμο: 3 085. Ο αριθμος αφτος αποτελίτε απο (5) μονάδες, (8) δεκάδες κε (3) χιλιάδες. Εκατοντάδες δεν έχι. Στι θέςι τις τρίτις ςιρας — τον εκατοντάδον — ςτέκετε μιδενικο. Εαν δεν βάνομε το μιδενικο, τότε θα ςχιματίζαμε τον αριθμο 385, πυ απανκέλετε ος εκςις: **τριακόςια ογδόντα πέντε.**

2. Γράπςαμε τον αριθμο: 4 000 236. Στον αριθμο αφτόνε δεν ιπάρχυν ι τρις ςιρες τις τάκςις τον χιλιάδον, μ' άλα λόγια — λίπι ι τάκςι τον χιλιάδον.

Για να μπορέςυμε έφκολα να απανκίλυμε τυς πολιπςίφιυς αριθμυς, τυς γράφυμε χορίζοντας τιν μία τάκςι απο τιν άλι με μικρα διαςτίματα.

Στον αριθμο 15 900 **χμ** ι τάκςι τον χιλιάδον ίνε χοριζμένι απο τιν τάκςι τον μονάδον.

3. Απο τιν αλαγι τις θέςις τον πςιφίον αλάζι κε ι ςιμαςία τυ αριθμυ. Ετςι ι αριθμι: 15 900· 15 090· 19 500· 51 009 — ίνε διάφορι: το πςιφίο 9 ςτον πρότο αριθμο ςιμένι 9 εκατοντάδες· ςτο δέφτερο — 9 δεκάδες· ςτον τρίτο—9 χιλιάδες· ςτον τέταρτο—9 μονάδες.

Ι γραφι τον αρ θμον ςτιρίζετε πάνο ςε διο κανόνες:

1) Ι ςιμαςία τον μονάδον, πυ ςιμιόςαμε με πςιφίο, εκςαρτάτε απο τιν θέςι, ςτιν οπία βρίςκετε το πςιφίο τύτο.

Το πςιφίο, πυ βρίςκετε ςτιν πρότι θέςι απο τα δεκςια ςτ' αριςτερα, δίχνι τις μονάδες, ςτι δέφτερι θέςι — τις δεκάδες, ςτιν τρίτι — τις εκατοντάδες τις πρότις τάκςις· έπιτα αρχίζυν — ι μονάδες, ι δεκάδες κε ι εκατοντάδες τις δέφτερις τάκςις. Επίςις με τι ςιρα έρχυντε ι τρίτι, ι τέταρτι κε ι άλες τάκςις.

2) Αν ςτιν τάκςι δεν ιπάρχι μονάδα κάπιας ςιρας, τότε τι μονάδα αφτι τιν αντικαταςτένυμε με μιδενικο[1].

---

[1] Το μιδενικο αραβικα λέγετε ς ι φ ρ.

Ο αριθμος, πυ ςιμιόνετε με ένα πςιφίο, ονομάζετε **μονοπςίφιος** ο αριθμος, πυ ςιμιόνετε με διο πςιφία ονομάζετε **διπςίφιος** κ.τ.λ. Ι διπςίφιι, τριπςίφιι κ.τ.λ. αριθμι ονομάζοντε **πολιπςίφιι.**

Π.χ: 9 — ο μεγαλίτερος μονοπςίφιος αριθμος.
302 — τριπςίφιος αριθμος.
5 400 — τετραπςίφιος αριθμος.
100 — ο μικρότερος τριπςίφιος αριθμος.
999 — ο μεγαλίτερος τριπςίφιος αριθμος.

Κατά τιν απανκελία τον γραφτον αριθμον, απανκέλυμε κςεχοριςτα τις μονάδες κάθε τάκςις, προςθέτοντας τιν ονομαςία τις τάκςις, π. χ: 917 χιλιάδες, 459 εκατομίρια.

Στις μονάδες τις πρότις τάκςις, τιν ονομαςία τις τάκςις αφτις δεν τιν λένε αλα τιν ενςύνε. Στι θέςι-τις απανκέλυν τιν ονομαςία εκίνον τον αντικιμένον πυ μετρύνε. Ετςι, π. χ. απανκέλυν: **345 ατμομιχανες**, αντις να πύνε **345 μονάδες ατμομιχανον.** Ο αριθμος 40 239 **μ.** απανκέλετε έτςι: **ςαράντα χιλιάδες διακόςια τριάντα ενέα μέτρα.**

§ 5. Ρομαικα πςιφία.

Ι ρομέι για να γράπςυν αριθμυς ος τα χίλια μεταχιρίζονταν τα ακόλυθα βαςικα πςιφία:

I — 1· X — 10· C — 100· M — 1000.

Εκτος απ' αφτα ίχαν κε άλα βοιθιτικα πςιφία:

V — 5· L — 50· D — 500.

Αν έγραφαν διο ίτε τρία όμια βαςικα πςιφία το ένα κοντα ςτο άλο, τότε ο αριθμος πυ ςχιματίζονταν ιςοδιναμύςε με το άθριζμα τον μονάδον αφτον, π. χ.

II — 2· XXX — 30· MM — 2 000.

Οταν έγραφαν τιν μονάδα τις κατότερις ςιρας ςτα δεκςια τον μονάδον τις ανότερις ςιρας, αφτο ςίμενε αριθμο ίςιον με το άθριζμα τον ςιμιομένον αριθμον, π. χ.

VI — 6· XXI — 21· MD — 1500.

Αν όμος έγραφαν τι μονάδα τις κατότερις ςιρας μπροςτα, διλ. ςτ' αριςτερα τον μονάδον τις ανότερις ςιρας, αφτο ςίμενε αριθμο ίςον με τι διαφορα τον ςιμιομένον αριθμον. π. χ.

IV — 4· IX — 9· XC — 90· CD — 400· CM — 900

Ι παράςταςι τριπςίφιον κε τετραπςίφιον αριθμον μ' αφτον τον τρόπο τις γραφις, ίτανε πολίπλοκος. Γι' αφτο τόρα, ςπάνια χριςιμοπιύνε τα ρομαικα πςιφία: ςτι ςιμίοςι τον κεφαλέον τον βιβλίον, τον τόμον τον ςινγραμάτον, τι χρονολογία τις καταςκεβις κάπιυ μνιμίυ κ. τ. λ.

II. ΜΕΤΡΑ. ΜΕΤΡΙΚΟ ΣΙΣΤΙΜΑ.

§ 1. Μεγέθι κε καταμέτρισί-τυς.

Κατα τυς μαθιματικυς ιπολογιζμυς έχυμε να κάνυμε με τα μεγέθι.

Οριζμος. **Μέγεθος στα μαθιματικα ονομάζετε κάθετι, πυ μπορύμε να σινκρίνυμε κε να καταμετρίσυμε.**

Το μίχος, το βάρος, ο όνκος, ο χρόνος ίνε μεγέθι.

Για τιν καταμέτρισι τον μεγεθον πρέπι να έχυμε μετρικι μονάδα.

Π. Χ. μέτρο, σαντίμετρο — μονάδες για τιν καταμέτρισι τυ μίχυς· χιλιόγραμο, γραμάριο — μονάδες τυ βάρυς· όρα, δεφτερόλεπτο — μονάδες τυ χρόνυ.

Οριζμι. **I. Μετρικι μονάδα ονομάζετε εκίνο το μέγεθος με το οπίο κατα τιν καταμέτρισι, σινκρίνυν όλα τα μεγέθι, πυ ίνε ομοιδι μ' αφτι τιν μονάδα.**

II. Να καταμετρίσυμε το μέγεθος, σιμένι να σινκρίνυμε αφτο με άλο μέγεθος ομοιδες, πυ παραδεχτίκαμε για μονάδα. Διλαδι να μάθυμε απο πόσες μονάδες, ίτε μερίδια αφτις τις μονάδας, αποτελίτε το δεδομένο μέγεθος.

Ι βασικες μετρικες μονάδες ίνε: τυ μάκρυς — το σαντίμετρο, τυ βάρυς — το γραμάριο, τυ χρόνυ — το λεπτο.

Ος αποτέλεζμα τις καταμέτρισις θα προκίπσι αριθμος, π. χ. το βάρος τυ αντικιμένυ, πυ ισοροπίτε με τρία χιλιόγραμα, σιμιόνυμε τον αριθμο 3.

§ 2. Μετρικο σίστιμα

Το σίνολο τον μονάδον, πυ χρισιμοπιύμε για τιν καταμέτρισι όλον τον μεγεθον ονομάζετε μ ε τ ρ ι κ ο σ ί σ τ ι μ α.

Με τιν ανάπτιξι τις τεχνικις παρυσιάζετε περισότερι ανάνκι να καταμετρίσυμε με μεγαλίτερι αχρίβια κε με σταθεροπιμένες μονάδες καταμέτρισις.

Σ' όλες τις εποχες τίθονταν τι ζίτιμα για τι δινατότιτα τις έβρεσις σταθερον μονάδον καταμέτρισις απ' τι γίρο-μας φίσι. Ετσι σχιματίστικαν ι μονάδες τυ χρόνυ: έτος, ιμερονίχτιο. Αφτες ι μονάδες αντιστιχυν σε οριζμένες κε παντοτινα επαναλαμβανόμενες στι φίσι ετίσιες κε ιμερονιχτιακες κινίσις τις γις. Ι μονάδα τυ μάκρυς πυ γένικε δεχτι — το μέτρο — σχετίζετε με τις διαστάσις τις γις.

Στι Γαλία, στον κερο τις Μεγάλις γαλικις επανάστασις στα 1795, ος μονάδα μάκρυς έχυν παραδεχτι το μάκρος τυ ενος δεκάκις εκατομιριοστυ μέρυς, τυ τέταρτυ τυ μεσιμβρινυ τον Παρισίον.

Ετιμάστικε ιπόδιγμα, το οπίο κε τόρα φιλάγετε στο διεθνες γραφίο τον μέτρον κε σταθμον στο Παρίσι — το μέτρο.

Σίμφονα με τις ακριβις εκσελένκσις, πυ χάνανε φάνικε, πος το μάκρος τυ μέτρυ ίνε λίγο μικρότερο απο το πραγματικο. Οστόσο, το ιπόδιγμα αφτο τυ μέτρυ σε διεθνι σιμφονία έγινε δεχτο ος μονάδα τυ μάκρυς. Διο αντίτιπα τυ μέτρυ τύτυ φιλάγοντε σε μας: στιν Ακαδιμία τον επιστιμον κε στο Ανότερο επιμελιτίριο τον μέτρον κε βαρον τυ Λενινγραντ.

Στα 1918 στις 14 Σεπτέβρι, με τιν απόφασι τον Σοβιετ τον λαικον κομισάρον, έχι ισαχτι ι ιποχρεοτικι χρισιμοπίισι τυ μετρικυ σιστίματος στιν ΕΣΣΡ. Το μετρικο σίστιμα βασίστικε πάνο στο γαλικο σίστιμα αρίθμισις. Ετσι λ.χ. το μέτρο περιέχι: 10 ντετσίμετρα, 100 σαντίμετρα, 1000 μιλίμετρα.

Στο μετρικο σίστιμα, πυ κάθε μονάδα ανότερις τάχσις περιέχι 10, 100, 1000 κ.λ.π. φορες, ίνε πολι κατάλιλο στυς μαθιματικυς ιπολογιζμυς.

§ 3. Σιμιόσις τον μονάδον.

Με τιν απόφασι τις Ιδικις επιτροπις τον μέτρον, έχυν ισαχτι σίντομες σιμιόσις τον μετρικον μονάδον.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΟΝ ΜΕΤΡΟΝ.

I. Μέτρα τυ μάκρυς.	1 χιλιόμετρο (χμ) = 1000 μέτρα (μ) 1 μ = 10 ντμ = 100 σμ = 1000 μμ 1 ντμ = 10 σμ = 100 μμ 1 σμ = 10 μμ
II. Μέτρα επιφανιον.	1 τετρ. χμ. = 1 000 000 τετρ. μ = 100 εχτάρια (εχτ) 1 εχτ = 100 αρ (α) = 10 000 τετρ. μ 1 α = 100 τετρ. μ 1 τετρ. μ = 100 τετρ. ντμ = 10 000 τετρ. σμ. 1 τετρ. ντμ = 100 τετρ. σμ 1 τετρ. σμ = 100 τετρ. μμ.
III. Μέτρα όνκυ.	1 κιβ. μ = 1000 κιβ. ντμ = 1 000 000 κιβ. σμ 1 κιβ. ντμ = 1000 κιβ. σμ = 1 000 000 κιβ. μμ 1 κιβ. σμ = 1 000 κιβ. μμ.
IV. Μέτρα βάρυς.	1 τόνος (τ) = 10 τσέντνερα (τσ) = 1000 χιλιόγραμα (χγ). 1 τσ = 100 χγ 1 χγ = 1000 γραμάρια (γ)

V. Μέτρα χοριτικότιτας έφχιτον κε ιγρον ςομάτον.	1 λίτρα (λ) ίνε χοριτικὸτιτα 1 κιβικυ ντμ 1 εκατόλιτρο (εκλ) = 100 λ
VI. Σχέςι μετακςι τον μέτρον τυ όνκυ κε τυ βάρυς	Βάρος 1 κιб. μέτρο νερυ ςε 4° K = 1 τ. „ „ 1 κιβ. ντετςιμ. „ „ „ = 1 χΓ „ „ 1 „ ςαντιμ. „ „ „ = 1 γ

III. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Πρόςθεςι.

Μετρόντας μπορύμε να προςθέςυμε τυς αριθμυς.

1. Ενα πεδι πίρε απ' το ςχολιο 8 τετράδια. Ι αδερφί-τυ πίρε 7 τετράδια. Πόςα τετράδια πὶραν μαζι;

Για να λίςυμε το πρόβλιμα πρέπι να μετρίςυμε όλα τα τετράδια πυ πίραν: το όλον — 15 τετράδια.

Γ ρ α φ ι τ ι ς λ ί ς ι ς: $8 + 7 = 15$ τετράδια. Στο παράδιγμα αφτο απο τυς διο δομένυς αριθμυς έπρεπε να ςχιματίςυμε νέο αριθμο, πυ να δίχνι, πόςο το όλο μονάδες έχυν αφτι ι αριθμι. Τέτια πράκςι ονομὰζετε πρόςθεςι.

2. Μπορύμε να προςθέςυμε κε κάμποςυς αριθμυς:

$$28 + 38 + 17 + 40 = 123.$$

Ο αριθμος 123 ονομάζετε άθριζμα τον τεςὰρον αριθμον: 28, 38, 17 κε 40.

Οριζμος. **Τυς αριθμυς, πυ προςθέτυμε τυς ονομάζυμε προςθετέυς. Ο αριθμος πυ προκίπτι απο τιν πρόςθεςι, ονομάζετε άθριζμα.**

Στο πρὸτο πρόβλιμα με τυς δεδομένυς προςθετέυς 8 κε 7 ςχιματίςτικε το άθριζμα 15.

Στιν περίπτοςι αφτι τον διο προςθετέον $(8 + 7 = 15)$ ίχαμε:

Πρότο προςθετέο + δέφτερο προςθετέο = άθριζμα.

Τιν πράκςι αφτι μπορύμε να τιν γράπςυμε πιο ςίντομα με τα γράματα τυ αλφάβιτυ $a + b = c$, ὸπυ ο πρότος προςθετέος παραςτένετε με το γρὰμα a, ο δέφτερος προςθετέος με το γρὰμα b, το άθριζμα με το γράμα c

Αθριζμα μπορύμε να ονομάςυμε όπος το c έτςι κε το $a + b$.

§ 2 Προβλίματα, πυ λίνυντε με πρόςθεςι.

1. Ενα κολχοζ ίχε τα ακόλυθα έςοδα:

Απο τιν πὺλιςι τον ςιτιρον ςτο κράτος	65 703 ρ.
Απο τιν πύλιςι προιόντον τυ λαχανόκιπυ	99 682 ρ.
Απο τιν πύλιςι προιόντον χτινοτροφίας	3 319 ρ.
Απο άλυς κλὰδυς τυ νικοκιριυ . . .	42 416 ρ.
Το όλον ίχε ὲςοδα το κολχοζ	211 120 ρ.

Στο πρόβλιμα τύτο ι ιδιέτερι αριθμι ίνε ι προςθετέι κε το γενικο ςίνολο, το άθριζμα αφτον τον προςθετέον. Λίνοντας το πρόβλιμα β ρ ί ς κ υ μ ε τ ο ά θ ρ ι ζ μ α κ ά μ π ο ς ο ν π ρ ο ς θ ε τ έ ο ν, βρίςκυμε αριθμο, ο οπίος περιέχι τόςες μονὰδες, όςες περιέχυν όλι ι δεδομένι αριθμι, μαζι παρμένι.

2. Ενας κολχόζνικος τον πρότο χρόνο, πυ μπίκε ςτο κολχοζ, πίρε έναντι τον εργατοιμερόν-τυ 23 τς ςιτάρι.

Μετα 1 χρόνο πίρε κατα 15 τς περιςότερο. Πόςα τςέντνερα πίρε το δέφτερο χρὸνο;

Λ ί ς ι. $23 + 15 = 38$ τς.

Εδο έχυμε διαφορετικο πρόβλιμα, πυ λίνετε με πρόςθεςι. Εδο π ρ έ π ι ν α α φ κ ς ί ς υ μ ε τ ο ν α ρ ι θ μ ο κ α τ α κ ὰ μ π ο ς ε ς μ ο ν ά δ ε ς (15).

Κε ς' αφτιν τιν περίπτοςι ι αριθμι (23 κε 15), πυ πίραμε για να προςθέςυμε, ονομάζυντε προςθετέι, το αποτέλεςμα τις πρόςθεςις διλ. ο 38 ονομάζετε άθριζμα.

Με τιν πρόςθεςι λίνυντε εκίνα τα προβλίματα, ςτα οπία πρέπι:

1) Να βρεθι αριθμος, ίςος με όλυς τυς δεδομένυς αριθμυς μαζι.

2) Να αφκςιθι ο δεδομένος αριθμος κατα κάμποςες μονάδες.

Σ ι μ ί ο ς ι. Κε τα διο προβλίματα ίνε πὰντα δινατα γι'αφτο μπορύμε να πύμε, πος ι πρὸςθεςι ίνε πράκςι, πυ πάντα μπορι να εκτελεςθι.

§ 3. Νόμι τις πρόςθεςις.

1. Απο το ςπίτι-μας ος τι μια άκρι τυ δρόμυ πρέπι να κὰνι κανένας 36 μ, ος τιν άλι άκρι 52 μ. Να βρεθι το μάκρος τυ δρόμυ.

Λ ί ς ι. Το γενικο μάκρος θα ίνε: $36 + 52 = 88$ μ.

Το ίδιο μάκρος θα προκίπςι κε αν ακόμα πάρυμε τυς αριθμυς με άλι ςιρα: $52 + 36 = 88$ μ. Βλέπυμε, πος το άθριζμα δεν εκςαρτάτε απο τιν αλαγι τις θέςις τον προςθετέον.

Μεταθετικος νόμος τις πρόςθεςις. **Απο τιν μετάθεςι τον προςθετέον το άθριζμα δεν μεταβάλετε.**

Σιμὸνοντας τυς προςθετέυς με τα γράματα a κε b, μπορύμε να γράπςυμε το νόμο τύτο ος εκςις: $a + b = b + a$.

Ο νόμος αφτος αλιθέβι κι αν ακόμα έχυμε άθριζμα τριον ί κε περιςότερον προςθετέον.

2. Να βρεθι το άθριζμα:

$$43 + 65 + 28 = 28 + 65 + 43 = 65 + 43 + 28 = 136.$$

Ι μεταθέςις τον προςθετέον τυ παραδίγματος τύτο δεν αλάζυν το άθριζμα.

Γραφι με τα γράματα: $a + b + c = b + a + c = c + a + b = a + + c + b$.

3. Εχτος απο το μεταθετικο νόμο, κατα τι λίςι προβλιμάτον πρόςθεςις ςιχνα εποφελύντε κε άλον ακόμα νόμο — τ ο ς ι ν θ ε τ ι κ ο.

Σινθετικος νόμος. **Για να βρύμε το άθριζμα μερικον προςθετέον, μπορύμε να τυς χορίςυμε ςε ομάδες κε να πάρυμε χοριςτα το άθριζμα κάθε ομάδας προςθετέον. Στο τέλος προςθέτυμε όλα τα αθρίζματα.**

Ο τρόπος αφτος απλοπιι τιν έβρεςι τυ αθρίζματος πολον προςθετέον.

4. να προςτεθυν: $15 + 35 + 22 + 8 + 46 + 9$.

Λ ί ς ι. Χορίζυμε τυς προςθετέυς ςε ομάδες, ι οπίες, δίνυν άθριζμα ςτρονκιλυς αριθμυς:

$$15 + 35 + 22 + 8 + 46 + 9 = (15 + 35) + (22 + 8) + (46 + 9 = \\ = 50 + 30 + 55 = 135.$$

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Ι παρενθέςις δίχνυν, πος τιν πρόςθεςι μέςα ςτις παρενθέςις πρέπι να τιν κάνυμε νορίτερα. Τα αποτελέζματα να τα προςθέςυμε ὶςτερα.

Κατα τυς αριθμιτικυς λογαριαζμυς ςιχνα εποφελύντε κε το μεταθιτικο κε το ςινθετικο νόμο.

5. Να βρεθι το άθριζμα $43 + 79 + 68$· τε άθριζμα, πυ προκίπτι ίνε 190.

Μπορύμε όμος να διεφκολίνυμε το λογαριαζμό-μας. Επιδι το άθριζμα $(60 + 7 + 1)$ αντικαθιςτα τον αριθμο 68, φένετε κςεκάθαρα, πος αλιθέβι κε το αντίθετο· τον αριθμο 68 ίνε δινατο να τον αντικαταςτίςυμε με το άθριζμα $60 + 7 + 1$.

Ας χορίςυμε τον αριθμο 68 ς' αφτυς τυς τρις προςθετέυς κε ας τυς βάλυμε ςτυς δεδομένυς αριθμύς-μας:

$$43 + 79 + 68 = 43 + 79 + 60 + 1 + 7.$$

Τόρα ας χορίςυμε ςε ομάδες όλυς τυς προςθετέυς, πυ πίραμε:

$$43 + 79 + 60 + 1 + 7 = (43 + 7) + (79 + 1) + 60 = \\ = 50 + 80 + 60 = 190$$

Καθένα προςθετέο μπορύμε να αντικαταςτίςυμε με άλυς κάμποςυς προςθετέυς, πυ να δόςυνε το ίδιο άθριζμα μ' αφτον.

§ 4. Πός προςθέτυμε άθριζμα ςε ένα αριθμο.

Ι νόμι τις πρόςθεςις μας επιτρέπυν να προςθέςυμε άθριζμα διο προςθετέον, προςθέτοντας τυς προςθετέυς, αντι τυ αθρίζματος.

1. Ενα κολχοζ παράδοςε ςιτάρι ςτο ελεβάτορ με παρτίδες. Τιν πρότι φορα παράδοςε 845 τς ςιτάρι, έπιτα έδοςε 30 τς κε 75 τς. Πόςο το όλο ςιτάρι παράδοςε το κολχοζ;

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε κατα διο τρόπυς.

1) Προςθέτυμε όλυς τυς αριθμυς:

$$845 + 30 + 75 = 950 \text{ τς.}$$

Στιν περίπτοςι αφτι βρίςκυμε το άθριζμα, προςθέτοντας κςεχοριςτα τυς προςθετέυς.

2) Μπορὺμε όμος να βριςκυμε πόςο ςιτάρι φέραμε τελεφτέα κε το εβριςκόμενο να προςθέςυμε ςτιν πρότι παρτίδα.

$$30 + 75 = 105 \text{ τς}, \ 845 + 105 = 950 \text{ τς}.$$

Εχι προκίπςι το ίδιο άθριζμα. Ας γράπςυμε τόρα τιν ιςότιτα αφτον τον αθριζμάτον με παρενθέςις:

$$845 + (30 + 75) = 845 + 30 + 75 = 950.$$

Για να προςθέςυμε ς' ένα οπιοδίποτε αριθμο, άθριζμα αριθμον, μπορύμε να προςθέςυμε ςτον αριθμο τύτο καθένα προςθετέο χοριςτα.

Ας γράπςυμε τον κανόνα τύτο με τα γράματα: $a + (b + c) = a + b + c$.

Ο κανόνας τις πρόςθεςις αθριζμάτον αλιθέβι κε για το άθριζμα οςονδίποτε προςθετέον.

2. Να βρεθι το άθριζμα: $38 + (42 + 65 + 27 + 83)$.

Λ ί ς ι:

$$38 + (42 + 65 + 27 + 83) = 38 + 42 + 65 + 27 + 83 = 255$$

§ 5. Πρόςθεςι ακέρεον αριθμον.

Κςέροντας τις ιδιότιτες τυ αθρίζματος, μπορύμε να εκςιγίςυμε όλυς εκίνυς τυς τρόπυς, τυς οπιυς μεταχιριζόμαςτε κατα τιν πρόςθεςι τον ακὲρεον αριθμον.

1. Ι πρόςθεςι μονοψίφιον αριθμον, τυ άθριζμα τον οπίον δεν ιπερβένι τα δὲκα, γίνετε ος εκςις: $3 + 5 = 8$·

2. Ι πρόςθεςι μονοψίφιον αριθμον, το άθριζμα τον οπίον ιπερβένι τον αριθμο 10 γίνετε έτςι:

$$8+7=8+(2+5)=8+2+5=(8+2)+5=10+5=15.$$

Εδο χορίςαμε το δέφτερο προςθετέο ςε δίο προςθετέυς κε προςθέςαμε το άθριζμά-τυς, εποφελύμενι το ςινθετικο νόμο.

Ο ένας προςθετέος πρέπι να ςιμπλιρόςι τον πρότο προςθετέο ος τα 10.

3. Κατα τιν πρόςθεςι πολιψίφιον αριθμον εποφελύμαςτε κε τον μεταθετικο κε τον ςινθετικο νόμο.

$$4385+2297=4000+300+80+5+2000+200+90+7=$$
$$=(4000+2000)+(300+200)+(80+90)+(5+7)=6000+$$
$$+500+170+12=6000+500+100+70+10+2=6000+$$
$$+(500+100)+(70+10)+2=6000+600+80+2=6682.$$

Απο το παράδιγμα αφτο φένετε, πος για να βρύμε το άθριζμα, προςθέτυμε χοριςτα τις μονάδες κάθε ςιρας.

Τι γραφτι διατίποςι μπορύμε να τιν ςιντομέψυμε:

$$\begin{array}{r} 4385 \\ +\,2297 \\ \hline 6682 \end{array}$$

Εαν το άθριζμα τον μονάδον πυ προκίπτι απο τιν πρόςθεςι ιπερβένι τον αρ. 10, τότε ξεχορίζυμε τις δεκάδες κε τις μετατρέπυμε ςε μονάδες τις ακόλυθις ανότερις ςιρας κε τις γράφυμε ς' αφτι τι ςιρα ίτε τις ςιμιόνυμε κε τις προςθέτυμε ςτο άθριζμα τον μονάδον τις ακόλυθις ανότερις ςιρας.

Για να προςθέςυμε κάμποςυς αριθμυς, γράφυμε τον ένα κάτο απο τον άλο, έτςι όςτε ι μονάδες καθεμιας ςιρας να βρεθυν ςε μια ςτίλι. Προςθέτυμε τις μονάδες, πυ αποτελυν τι δεξια ςτίλι κε κάτο απο αφτι γράφυμε το αποτέλεζμα αν ίνε λιγότερο τυ 10. Εάν όμος ίνε μεγαλίτερο ίτε ίςο με το 10, τότε γράφυμε μονάχα το ψιφίο τον μονάδον-τυ κε τις δεκάδες προςαρτύμε ςτι ςτίλι τον δεκάδον, έπιτα προςθέτομε τις δεκάδες κε εχτελύμε το ίδιο ακριβος, ότι κε με τι ςτίλι τον μονάδον· έτςι εξακολυθύμε τιν πράξι οςότυ να τελιόςυν όλες ι ςτίλες. Κάτο απο τιν τελεφτέα ςτίλι γράφυμε όλο το αποτέλεζμα, αδιάφορο αν ίνε μεγαλίτερο ίτε μικρότερο απο το δέκα. Ο αριθμος, πυ προκίπτι ςτο τέλος ίνε το ζιτύμενο άθριζμα.

§ 6. Αφέρεςι.

1. Ενας μιχανο-τραχτορικος ςταθμος έχι 36 τράχτορα. Εςτιλε απο αφτα ςτο όργομα 17 τράχτορα. Πόςα τράχτορα έμιναν πίςο;

Λ ί ς ι. 36 — 17 = 19.

Ι πράξι αρτι ονομάζετε αφέρεςι. Εαν προςθέςυμε το 19 κε το 17, θα έχυμε άθριζμα 36:

$$19+17=36.$$

Το 36 ίνε άθριζμα· το 19 κε 17 — προςθετέι. Ξέροντας το άθριζμα κε ένα προςθετέο 17, βρίςκυμε με τιν αφέρεςι το δέφτερο προςθετέο, το 19.

Οριςμος. **Αφέρεςι λέγετε ι πράξι εκίνι μέςον τις οπίας, απο το άθριζμα κε ένα γνοςτο προςθετέο, βριςκυμε τον άγνοςτο προςθετέο.**

Οταν κάνυμε τιν αφέρεςι, δεν ονομάζυμε τυς αριθμυς άθριζμα ίτε προςθετέυς, αλα τυς δίνυμε διαφορετικες ονομαςίες:

Ι. Ο αριθμος, απο τον οπίο αφερύμε τον άλο, ονομάζετε μιοτέος.

ΙΙ. Ο αριθμος τον οπίο αφερύμε, ονομάζετε αφερετέος.

ΙΙΙ. Ο αριθμος, πυ προκίπτι ος αποτέλεζμα τις αφέρεςις, ονομάζετε ιπόλιπο, ίτε διαφορα.

Στο πρότο πρόβλιμα βρίκαμε 36 — 17 = 19. Το 36 μιοτέος. Το 17 αφερετέος. Το 19 ιπόλιπο, ίτε διαφορα.

Μιοτέος — αφερετέος = διαφορα.

Ι γραπτι διατίποςι τις αφέρεςις με γράματα: $a-b=c$. Ο a — παραςτένι το μέγεθος τυ μιοτέυ, ο b — το μέγεθος τυ αφερετέυ, ο c — το μέγεθος τις διαφορας.

Διαφορα ονομάζετε όπος το c, έτςι κε το $a-b$.

§ 7. Ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι ίνε πράξις αμιβέα αντίςτροφες.

Ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι ίνε πράξις α μ ι β έ α α ν τ ί ς τ ρ ο φ ε ς.

$$340+250=590 \text{ κε } 590-250=340.$$

Ας γράψυμε τις ονομαςίες τον αριθμον, με τυς οπίυς εχτελύντε ι πράξις:

	Κατα τιν πρόςθεςι.	Κατα τιν αφέρεςι.
590	το άθριζμα	ο μιοτέος
250	ο ένας προςθετέος	ο αφερετέος
340	ο άλος προςθετέος	ι διαφορα

Σινέπιες. **1. Ο μιοτέος ιςύτε με τον αφερετέο ςιν τι διαφορα.**

2. Ο αφερετέος ιςύτε με το μιοτέο, πλιν τι διεφορα.

Ι ςινέπιες 1 κε 2 μας επιτρέπυν να βρίςκυμε τον αφερετέο κε τον μιοτέο, όταν αφτι ίνε άγνοςτι.

1) $x-5=9$.

Ο μιοτέος ίνε το x, ο αφερετέος το 5, ι διαφορα το 9. Βρίςκυμε:

$$x=9+5 \cdot \quad x=14.$$

2) $8-x=3$.

Εδο το x — αφερετέος, το 8 — μιοτέος, το 3 — διαφορα. Βρίςκυμε:

$$x=8-3 \cdot \quad x=5.$$

3) Ενα επιβατικο τρένο αποτελίτε απο 14 βαγόνια. Στο ςταθμο τις διαςτάβροςις προςαρτίςανε ςτο τρένο 2 βαγόνια κε κςεγαντζόςανε 2 πυ έφταςαν ςτον τόπο-τυς. Αλακςε ο αριθμος τον βαγονιον τυ τρένυ;

Λ ί ς ι. 14 + 2 — 2 = 14 βαγόνια.

Τιν προςάρτιςι κε το κςεγάντζομα τον βαγονιον μπορύςαμε να τιν εχτελέςυμε κε κατ'άλο τρόπο. Ιταν δινατο πρότα να κςεγαντζόςυμε διο βαγόνια, κε κατόπιν να προςαρτίςυμε άλα διο. Σ' αφτι τιν περίπτοςι ι γραφτι διατίποςι τις λίςις θα ίχε τι μορφι: 14 — 2 + 2 = 14. Το αποτέλεζμα ίνε το ίδιο.

Ι λίςι αφτυ τυ προβλίματος μας επιτρέπι να ορίςυμε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τις πρόςθεςις κε αφέρεςις ος αντίςτροφες πράκςις.

Αν ς'έναν αριθμο προςθέτυμε άλον αριθμο, κε ίςτερα αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο, τότε θα προκίπςι ο προτίτερος αριθμος.

Ετςι ι μια απο τις διο αμιβέα αντίςτροφες πράκςις εχμιδενίζι το αποτέλεζμα τις δέφτερις πράκςις.

§ 8. Προβλίματα πυ λίνυντε με αφέρεςι.

1. Ενα κολχόζ κςόδεπςε το όλο 46 183 ρύβλια. Απ' αφτα, τα 27 953 κςοδέφτιχαν για το νιχοκιριο. Τα επίλιπα χρίματα δόθικαν έναντι τυ χρέυς ςτιν τράπεζα. Πόςα ρύβλια πλίροςε το κολχοζ ςτιν τράπεζα;

Λ ί ς ι: 46 183 — 27 953 = 18 230 ρύβλια.

Στο πρόβλιμα αφτο το άθριζμα τον διο προςθετέον ίνε 46 183 κε ο ένας απο αφτυς το 27 953.

Πρέπι απο το άθριζμα τον διο αριθμον κε απο τον ένα απο αφτυς να βρεθι ο δέφτερος. Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με αφέρεςι. Βρέθικε το ιπόλιπο τον χριμάτον, πυ πρέπι να πλιρόςι το κολχοζ ςτιν τράπεζα.

2. Το ςφιρι το κινύμενο με ατμο ςφιριλατόντας εκςαρτίματα βγάζι ςχάρτα 40 περίπυ εκςαρτίματα, τιν ιμέρα. Ι μπριγάδα, πυ δυλέβι ςτο ςφιρι αφτο αποφάςιςε να ελατόςι τον αριθμο τον ςχάρτον κατα 15. Να βρεθι το όριο τυ αριθμυ τον ςχάρτον, πυ ι μπριγάδα θεορι ανεχτο.

Λ ί ς ι. 40 — 15 = 25 εκςαρτίματα.

Στο πρόβλιμα αφτο πρέπι να ελατόςομε τον αριθμο 40 κατα 15 μονάδες.

Το πρόβλιμα λίνετε με τιν αφέρεςι.

3. Ι χτίςτες χτίζοντας τίχο επιθέτανε 800 τύβλα τιν ιμέρα. Ενας υντάρνικος άφχιςε τον αριθμο αφτο ος 1300 τύβλα. Πόςα περιςότερα τύβλα βάζι ο υντάρνικος απο τυς άλυς χτίςτες;

Λ ί ς ι. 1300 — 800 = 500 τύβλα.

Στο πρόβλιμα τύτο ςινκρίνοντε διο αριθμι: Μαθένυμε κατα πόςες μονάδες ίνε μεγαλίτερος, ο ένας αριθμος απ' τον άλο.

Κι' αφτο το πρόβλιμα λίνετε με τιν αφέρεςι.

Ι αφέρεςι εφαρμόζετε τότε, όταν χριάζετε:

1) Να βρίςκυμε ένα προςθετέο, κςέροντας το άθριζμα διο προςθετέον κε έναν απ'αφτυς.

2) Να ελατόνυμε τον αριθμο κατα κάμποςες μονάδες (να αφερύμε μερικες μονάδες).

3) Να μαθένυμε, κατα πόςες μονάδες ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος ίτε μικρότερος απο τον άλο (ςίνκριςι διο αριθμον).

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι Ι. Το δέφτερο πρόβλιμα για αφέρεςι, δεν ίνε πάντα δινατο. Αφτο δε μπορι να λιθι, αν θέλυμε να ελατόςυμε τον αριθμο κατα αριθμο, μεγαλίτερο τυ μιοτέυ.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι ΙΙ. Αν ο μιοτέος ίνε ίςος με τον αφερετέο, τότε ι διαφορα ίνε ίςι με μιδενικο.

Παράδ γμα: 8—8=0.

Πόριζμα. **Αν ι διαφορα διο αριθμον ιςύτε με μιδενικο, τότε ι αριθμι αφτι ίνε ίςι.**

§ 9. Μεταβολι τυ αθρίζματος.

1. Το κατικίςιμο εμβαδο ενος ςπιτιυ, πυ χτίζετε ςίμφονα με το ςχέδιο, πρέπι να αποτελι 56 **τετρ. μ.** Το βοιθιτικο εμβαδο 15 **τετρ. μ.** Κατα τιν επικίροςι τυ ςχεδίυ αποφάςιςαν να μεγαλόςυν το κατικίςιμο εμβαδο τυ ςπιτιυ, κατα 12 **τετρ. μ.** Πόςο ίτανε το γενικο εμβαδο ςτο πρότο ςχέδιο κε κατα πόςο άλακςε ςτο δέφτερο ςχέδιο;

Λ ί ς ι. Σίμφονα με το αρχικο ςχέδιο το γενικο εμβαδο ιςύταν:

56 + 15 = 71 **τετρ. μ.**

Αφκςάνοντας τον ένα προςθετέο κατα 12 **τετρ. μ** αφκςάνυμε κε όλο το άθριζμα κατα 12 **τετρ. μ** κε βρίςκυμε:

56 + 15 + 12 = 68 + 15 = 71 + 12 = 83 **τετρ. μ.**

I. Εαν αφκςίςυμε τον ένα προςθετέο με οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε το άθριζμα αφκςένι κατα τον ίδιο αριθμο.

2. Το βάρος αφτοκίνιτυ ίνε 4 200 **χγ**. Το βάρος τυ φορτίυ 4 800 **χγ**. Πόςο ζιγίζι το αφτοκίνιτο με το φορτίο μαζι; Πος θα αλάκςι το γενικο βάρος τυ φορτομένυ αφτοκίνιτυ, έαν τυ βάρος τυ φορτίυ ελατοθι κατα 200 **χγ**;

Δ ί ς ι. Το βάρος τυ αφτοκίνιτυ μαζι με το φορτίο επίςις θα λιγοςτέπςι κατα 200 **χγ**.

Ι λίςι αφτυ τυ προβλίματος δίχνι, πος κατα τιν ελάτοςι ενος προςθετέυ, ελατόνετε κε το άθριζμα.

II. Εαν κάπιον απ' τυς προςθετέυς ελατόςυμε κατα έναν αριθμο, τότε κε το άθριζμα θα ελατοθι κατα τον ίδιο αριθμο.

3. Ενα αφτοκίνιτο ζιγίζι 4 200 **χγ**. Πάνο ς' αφτο μπορύμε να φορτόςυμε 4 800 **χγ** Πός αλάζι το βάρος τυ αφτοκίνιτυ με το φορτίο, εαν ελαφρόςυμε το αφτοκίνιτο κατα 200 **χγ**., κε αφκςίςυμε το φορτίο κατα 200 **χγ**;

Δ ί ς ι. Το προιγύμενο βάρος τυ αφτοκίνιτυ με φορτίο: 4 200 + 4 800 = 9 000 **χγ**.

Το νέο βάρος: 4 200 — 200 + 4 800 + 200 = 4000 + 5000 = 9 000 **χγ**.

Το γενικο βάρος τυ αφτοκίνιτυ με το φορτίο μαζι δεν αλάζι. Ετςι το άθριζμα δεν άλακςε, όταν μεγαλόςαμε τον ένα προςθετέο κε τον άλο λιγοςτέπςαμε κατα 200 **χγ**.

III. Εαν ς'έναν απο τυς προςθετέυς προςθέςυμε οπιοδίποτε αριθμο, κε ςινάμα απο τον άλο προςθετέο αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο, τότε το άθριζμα δεν μεταβάλετε.

§ 10. Μεταβολι τις διαφορας.

1. Ι κοπερατίβα ίνε ανάνκι να έχι αποθικεμένα άλεβρα 320 **χγ**. Πίρε μονάχα 140 **χγ**. Πόςα **χγ**. άλεβρα πρέπι να πάρι ακόμα ι κοπερατίβα;

Δ ί ς ι. 320 — 240 = 80 **χγ**.

Στο παράδιγμα αφτο ο αριθμος 320 ίνε ο μιοτέος, ο αριθμος 240 — ο αφερετέος, 80 — το ιπόλιπο.

Πός θα αλάκςι το ποςο τύτο, εαν θα ίνε ανάνκι να αφκςίςι ι κοπερατίβα τα αποθικέματά-τις κατα 60 **χγ**; Να τα ελατόςι κατα 60 **χγ**;

Οταν ο μιοτέος μεγαλόνι κατα 60 **χγ**, τότε κε ι διαφορα θα μεγαλόςι κατα 60 **χγ**. Ενοίτε πος ι ελάτοςι τυ μιοτέυ κατα 60 **χγ** ελατόνι

κε τι διαφορα κατα 60 **χγ**. Εδο έχυμε παραδίγματα ελάτοςις κε άφκςιςις τυ μιοτέυ.

I. Εαν αφκςίςυμε το μιοτέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα αφκςένι κατα τον ίδιο αριθμο.

II. Εαν ελατόςυμε το μιοτέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα ελατόνετε κατα τον ίδιο αριθμο.

2. Πος μεταβάλετε το ποςο τον αλέβρον, πυ έχι να πάρι ι κοπερατίβα (προιγύμενο παράδιγμα) εαν δόςυνε ς' αφτι 30 **χγ** περιςότερο; ίτε 30 **χγ** λιγότερο;

Στιν πρότι περίπτοςι ο αφερετέος άφκςιςε κατα 30. Μπορύμε να βεβεοθύμε, πος ι διαφορα θα ελατοθι κατα 30 κε θα αποτελέςι 50 **χγ**, ςτι δέφτερι περίπτοςι ο αφερετέος θα ελατοθι κατα 30, ενο ι διαφόρα θα αφκςιθι κατα 30, κε θα αποτελέςι 110 **χγ**.

I. Εαν αφκςίςυμε τον αφερετέυ κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε κε ι διαφορα ελατόνετε κατα τον ίδιο αριθμο.

II. Εαν ελατόςυμε τον αφερετέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο, τότε ι διαφορα αφκςένι κατα τον ίδιο αριθμο.

3. Να βρεθι ι διαφορα 1200—800. Πός θ' αλάκςι ι διαφορα, αν θα αφκςίςυμε ςινάμα κε το μιοτέο κε τον αφερετέο κατα ένα οπιοδίποτε αριθμο; Ι διαφορα απο αφτο δεν αλάζι. Επίςις δεν αλάζι κε απο τιν ελάτοςι τυ μιοτέυ κε αφερετέυ κατα ένα κε τον ίδιο αριθμο.

1200 — 800 = 1300 — 900 = 1000 — 600 = 400

Εδο κε ι διο αριθμι έχυν αφκςίςι κατα 100, ίτε έχυν ελατοθι κατα 200.

Εαν αφκςίςυμε ίτε ελατόςυμε το μιοτέο κε τον αφερετέο κατα ένα κε τον ίδιο αριθμο, τότε ι διαφορα δεν αλάζι.

§ 11. Αφέρεςι αθρίζματος. Πρόςθεςι κε αφέρεςι διαφορας.

1. Απο τα 250 ρύβλια πυ πίρα, πλίροςα για το δάνιο 25 ρυβ. κε αγόραςα 50 ρυβ. πράματα. Πόςα χρίματα μυ έμιναν;

Δ ί ς ι. Ι λίςι μπορι να γίνι με διο τρόπυς:

1) αφερύμε απο τα 250 ρυβ. το γενικο άθριζμα τον εκςόδον.

250 — (25 + 50) = 250 — 75 = 175 ρυβ.

2) αφερύμε τον ένα κατόπιν τυ άλυ κε τυς διο αριθμυς:

250 — 25 — 50 = 175.

Γράφοντας τιν ισότιτα τον δίο αποτελεζμάτον, καταλίγυμε στον κανόνα τις αφέρεσις αθρίζματος.

$$250 - (25 + 50) = 250 - 25 - 50 = 175.$$

I. Για να αφερέσυμε απο ένα οποιοδίποτε αριθμο, άθριζμα άλον αριθμον, μπορύμε να αφερέσυμε απο αριθμο τύτο, καθένα προσθετέο χοριστα, τον ένα κατοπιν τυ άλυ.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a - (b + c) = a - b - c$.

Ο τελεφτέος κανόνας διεφκολίνι τιν αφέρεσι, όταν πρέπι να αφερέσυμε κάμποσυς αριθμυς απο ένα κε τον αφτο αριθμο.

2. Να αφερεθυν $420 - 103 - 65 - 42 - 17$.

Λίσι. Θα αφερέσυμε το άθριζμα όλον τον αριθμον, πυ πρέπι να αφερεθυν. Ι πράκσι αφτι αντικαθιστα τέσερες διαδοχικες αφερέσις:

$$420 - (103 + 65 + 42 + 17) = 420 - 227 = 193.$$

Στο ίδιο αποτέλεζμα θα καταλίκσυμε, αν τον ένα κατόπι τυ άλυ, αφερέσυμε κε τυς τέσερες αριθμυς:

$$420 - 103 - 65 - 42 - 17 = 193.$$

3. Ενας σσοφερ για κάθε ταξίδι, πυ κάνι χορις να πάθι αβαρία, πέρνι βραβίο, κε για κάθε ταξίδι, πυ παθένι αβαρία, τυ κρατάνε οριζμένο ποσο. Ο σσοφερ αφτος πίρε 250 ρυβ. μισθο, 80 ρύβλια βραβία κε τυ κρατίσανε για τις αβαρίες πυ έπαθε, 30 ρ. Πόσα ρύβλια πίρε μετριτα;

Λίσι. Μπορύμε να λίσυμε το πρόβλιμα αφτο με δίο τρόπυς:

1) $250 + 80 - 30 = 300$ ρύβλια

2) $250 + (80 - 30) = 250 + 50 = 300$ ρύβλια.

Στιν τελεφτέα λίσι αμέσος προσθέσαμε τι διαφορα τυ βραβίυ, πυ πίρε, κε κίνα πυ τυ κρατίσανε. Καταλίκσαμε στο ίδιο αποτέλεζμα.

II. Για να προσθέσυμε σ'έναν οποιοδίποτε αριθμο, τι διαφορα διο αριθμον, μπορύμε να προσθέσυμε στον αριθμο αφτο τον μιοτέο κε να αφερέσυμε τον αφερετέο.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a + (b - c) = a + b - c$.

Εαν αλάκσυμε το πρόβλιμα, τότε μπορύμε να ιποδίκσυμε τον κανόνα τις αφέρεσις τις διαφορας.

4. Τον χερο πυ πλιρόσανε τον σσοφερ, πίρε μισθο 250 ρυβ., βραβία 40 ρυβ. κε τυ κρατίσανε 60 ρύβλια για τις αβαρίες. Πόσα ρύβλια πίρε μετριτα;

Λίσι. Ι τρόπος: $250 - 60 + 40 = 230$. ρυβ.

II τρόπος: $250 - (60 - 40) = 230$ ρυβ.

Κατα τι δέφτερι λίσι αμέσος αφερύμε τι διαφορα τον βραβίον κε τυ πρόστιμυ. Κε ι διο τρόπι δίνυν το ίδιο αποτέλεζμα.

$$250 - (60 - 40) = 250 - 60 + 40.$$

III. Για να αφερέσυμε απο ένα οποιοδίποτε αριθμο τι διαφορα διο άλον, αφερύμε απο τον αριθμο αφτο το μιοτέο κε προσθέτυμε τον αφερετέο.

Αφτο γράφετε με γράματα: $a - (b - c) = a - b + c$.

§ 12. Αφέρεσι ακέρεον αριθμον.

1. Τιν αφέρεσι οποιοδίποτε αριθμον τιν κάνυνε σίμφονα με τυς κανόνες τις αφέρεσις τυ αθρίζματος.

$$8426 - 5312 = 8426 - (5000 + 300 + 10 + 2) = 8426 - (2 + 10 + 300 + 5000) = 8426 - 2 - 10 - 300 - 5000 = 8424 - 10 - 300 - 5000 = 8414 - 300 - 5000 = 8114 - 5000 = 3114.$$

Σίντομα γράφυν τυς αριθμυς τον ένα κάτο απ'τον άλο κε αμέσος κάνυν τιν αφέρεσι κατα σιρα:

$$\begin{array}{r} 8426 \\ -\,5312 \\ \hline 3114 \end{array}$$

Δισκολίες απαντύμε μονάχα τότε, όταν ο αριθμος τον μονάδον κάποιας σιρας τυ μιοτέυ ίνε μικρότερος απο τον αριθμο τον μονάδον τις ίδιας σιρας τυ αφερετέυ.

2. Να αφερεθι: $6948 - 5173$.

Εδο απο τις 4 δεκάδες τυ μιοτέυ πρέπι να αφερεθυν ι 7 δεκάδες τυ αφερετέυ. Αφτο δεν ίνε δινατο να γίνι. Τότε δανίζοντε μια μονάδα απο τιν πλαγινι ανότερι σιρα τυ μιοτέυ, σ'αφτι τιν περίπτοσι μια εκατοντάδα, τιν κάνυνε δεκάδες κε προσθέτυν αφτες στις 4 δεκάδες τυ μιοτέυ:

Τότε έχυμε: $10 + 4 = 14$ δεκάδες, αφερυν: $14 - 7 = 7$ δεκάδες.

Κατα τιν γραφτι διατίποσι, τιν πράκσι αφτι τιν κάνυν απο μνίμις, κε κίνα πυ δανίζοντε σιμιόνυν με τελία πάνο στον αριθμο εκίνις τις σιρας, απο τιν οπία δανιστίκανε τι μονάδα. Κατόπι αφερύνε τι μια εκατοντάδα τυ αφερετέυ όχι απο τις 9, αλα απο τις 8 εκατοντάδες τυ μιοτέυ.

Να πος το γράφυν:

```
 6948
-5173
 1775
```

Εδο απο μνίμις προςθέςαμε 10 δεκάδες σε 4 δεκάδες τυ μιοτέυ κε αφερέςαμε 1 εκατοντάδα απο τιν εκατοντάδα τυ μιοτέυ. Ο μιοτέος απ'αφτο δεν άλακςε.

Ας δοκιμάςυμε ακόμα παραδίγματα αφέρεςις.

```
1.  4058
   -2723
    1335
```

Εδο ανανκαζόμαςτε να προςθέςυμε μια χιλιάδα, ίτε 10 εκατοντάδες, ςτις εκατοντάδες τυ μιοτέυ κε να ελατόςυμε κατα μια χιλιάδα τις χιλιάδες τυ μιοτέυ.

```
2.  140 072
    -58 391
     81 681
```

Εδο δανιζόμαςτε απο τις τέςερες δεκάδες τον χιλιάδον, μια δεκάδα χιλιάδον κι απ'αφτι μια χιλιάδα, διλ. 10 εκατοντάδες προςθέτυμε ςτις εκατοντάδες, τις δε ιπόλιπες 9 χιλιάδες—ςτις χιλιάδες.

Για να αφερέςυμε διο αριθμυς, γράφυμε τον αφερετέο κάτο απο τον μιοτέο, έτςι όςτε ι μονάδες κάθε μιας ςιρας να βρεθυν ςτιν ίδια ςτίλι. Αφερύμε τον αριθμο τον μονάδον τυ αφερετέυ τις κατότερις ςιρας, απο τις μονάδες τυ μιοτέυ τις αντίςτιχις ςιρας. Το εβριςκόμενο ψιφίο ίνε ι μονάδες τις διαφορας.

Εαν όμος ι μονάδες τυ αφερετέυ δεν αφερύντε απο τις μονάδες τυ μιοτέυ, τότε ςτις μονάδες τυ μιοτέυ προςθέτυμε 10 κε ελατόνυμε κατα 1 τον αριθμο τον μονάδον τις πλαγινις ανότερις ςιρας (τον δεκάδον). Ετςι εκςακολυθύμε τιν πράκςι με τις δεκάδες, εκατοντάδες κ.τ.λ. ος το τέλος.

§ 13. Δοκιμι τις πρόςθεςις.

Δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι. Για τιν δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι εποφελύντε το μεταθετικο νόμο τις πρόςθεςις ος εκςις: προςθέτυν ακόμα μια φορα όλυς τυς προςθετέυς, αλα με άλι ςιρα. Πρέπι να πάρυμε το ίδιο άθριζμα.

Κάνετε τι δοκιμι τις πρόςθεςις: 327+516=843.

Λίςι. Μεταθέτοντας τυς προςθετέυς, έχυμε:

516+327=843.

Ι πράκςι ίνε ςοςτι, επιδι έχυμε το ίδιο άθριζμα.

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν πρόςθεςι, πρέπι να κάνυμε άλι μια φορα τιν πρόςθεςι μεταθέτοντας τυς προςθετέυς.

Δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν αφέρεςι. Να βρεθι το άθριζμα κε να γίνι ι δοκιμι τις αφέρεςις:: 3573+8949

Λίςι 3573+8949=12522.

Δοκιμι. Κςέρυμε, πος ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι—ίνε πράκςις αμιβέα αντίςτροφες. Γι'αφτο, αφερόντας απο το άθριζμα τον ένα απο τυς προςθετέυς, πρέπι να βρίςκυμε τον δέφτερο προςθετέο.

12 522 — 3573=8949

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις πρόςθεςις με τιν αφέρεςι, πρέπι να αφερέςυμε απο το άθριζμα τον ένα προςθετέο κε τότε πρέπι να βρύμε τον άλον προςθετέο.

§ 14. Δοκιμι τις αφέρεςις.

Θεορόντας τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι ος αμιβέα αντίςτροφες πράκςις, βρίςκυμε απλυς τρόπυς δοκιμις τις αφέρεςις.

Δοκιμι τις αφέρεςις με πρόςθεςι. Να βρεθι ι διαφορα κε να γίνι ι δοκιμι τις ορθότιτας τις λίςις: 1080 — 935.

Λίςι 1080 — 935 = 145.

Ο τρόπος τις δοκιμις βαςίζετε ςτο ότι ο μιοτέος ίνε το άθριζμα, ενο ο αφερετέος κε ι διαφορα ίνε προςθετέι.

Προςθέτοντας τον αφερετέο κε τι διαφορα διλ. 935 κε 145, πρέπι να βρύμε μιοτέο — το άθριζμα 1080.

935 + 145 = 1080.

Για να κάνυμε τιν δοκιμι τις αφέρεςις με τιν πρόςθεςι, πρέπι να προςθέςυμε τον αφερετέο κε τι διαφορα κε πρέπι να βρύμε τον μιοτέο.

Ι δοκιμι τις αφέρεςις με αφέρεςι. Τιν ορθότιτα τις αφέρεςις μπορύμε να τιν εκςακριβόςυμε κςανα με αφέρεςι εποφελύμενι, το ότι ο αφερετέος (ένας προςθετέος) ίνε ίςος με τον μιοτέο (άθριζμα) πλιν τιν διαφορα (το άλο άθριζμα). Ι τελεφτέα ιςότιτα δίνι τιν δοκιμι τις αφέρεςις με αφέρεςι.

Για να κάνυμε τι δοκιμι τις αφέρεςις, με αφέρεςι

πρέπι να αφερέςυμε απ'τον μιοτέο το ιπόλιπο κε πρέπι να βρύμε τον αφερετέο.

§ 15. Αφέρεςι με ςιμπλίροςι.

Ι αφέρεςι με ςιμπλίροςι ςτιρίζετε ςτις ιδιότιτες τον αντίςτροφον πράκςεον. Αφτυς μπορύμε να εποφελιθύμε τον κερο πυ χάνυμε λογαριαζμο απο μνίμις, κε κατα τι γραφτι αφέρεςι οπιονδίποτε αριθμον.

Ας κάνυμε με το ςινιθιζμένο τρόπο αφέρεςι κε πρόςθεςι:

$$1.\quad \begin{array}{r} 849 \\ -\ 514 \\ \hline 335 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 514 \\ +\ 335 \\ \hline 849 \end{array}$$

Μπορύμε να κάνυμε τιν ακόλυθι ςκέψι:

Πόςες μονάδες πρέπι να προςθέςυμε ςτις 4 μονάδες, για να βρύμε 9; Ινε ολοφάνερο, 5. Πόςες δεκάδες ςτι 1 δεκάδα για να βρύμε 4; Ινε ολοφάνερα 3. Πόςες εκατοντάδες ςτις 5 εκατοντάδες, για να βρύμε 8; Ινε ολοφάνερο 3.

Ι λίςι γράφετε κατα τον ςινίθι τρόπο.

Θα έχυμε μερικες διςκολίες ςτιν περίπτοςι εκίνι, όταν ο αριθμος τον μονάδον κάπιας ςιρας τυ αφερετέυ, ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ τις ίδιας ςιρας τυ μιοτέυ.

$$2.\quad \begin{array}{r} 753 \\ -\ 738 \\ \hline 15 \end{array}$$

Στιν περίπτοςι αφτι ι ερότιςι μπένι έτςι: πόςο να προςθέςυμε ςτον 8, για να βρύμε τον πλιςιέςτερο ςτον 8 αριθμο, πυ να τελιόνι ςε 3; Απάντιςι: 5, επιδι $5 + 8 = 13$. Στι θέςι τον μονάδον γράφυν 5, κε τι δεκάδα, πυ έχι προκίψι τιν έχυν ιπόψι. Σινεχίζοντας, θα αφκςίςυμε τις 3 δεκάδες τυ αφερετέυ ος 4, κι όχι ος 5.

Τον τρόπο αφτον εφαρμόζυν κε κατα τιν αφέρεςι κάμποςον αριθμον.

3. Ι ςιμπλίροςι κάθε αριθμυ όςπυ να φτάςι μια μονάδα τις ανότερις ςιρας, γίνετε τόςο απλα, όςτε το αποτέλεζμα μπορύμε να το ςιμγράψυμε απο τα αριςτερα ςτα δεκςια. Κάθε πςιφίο πυ αφερύμε το ςιμπλιρόνυμε ος το 9, εχτος απο το τελεφτέο πςιφίο, το οπίο ςιμπλιρόνυμε ος το 10.

Μ' αφτον τον τρόπο ας κάνυμε τις ακόλυθες αφερέςις:

$$1\,000 - 475 = 525,$$
$$1\,000\,000 - 51\,2097 = 487\,903,$$
$$100\,000 - 81\,963 = 18\,037,$$
$$10\,000 - 5\,920 = 4\,080.$$

§ 16. Στρονκίλοςι τον αριθμον.

Ο πλιθιζμος τον πόλεον τις ΕΣΣΡ αφκςένι γλίγορα. Παράδιγμα ας πάρυμε το Μπακυ, πυ ςτα 1913 ίχε 333 958 κατίκυς, ςτα 1920 255 566 κατίκυς, ςτα 1926 — 453 333 κατίκυς, ςτα 1931 — 589 634 κατίκυς. Να βρεθι, πια απο τις παραπάνο περιόδυς έδοςε τιν μεγαλίτερι άφκςιςι τον κατίκον τυ Μπακυ.

Για να λίςυμε το πρόβλιμα δεν ίνε ανάνκι να πάρυμε ακριβις αριθμυς, πυ έχυν δοθι ςτο πρόβλιμα. Εχτος απο τύτο, κε αφτυς ακόμα τυς αριθμυς δεν μπορύμε να τυς λογαριάςυμε ακριβις. Γι' αφτο θα ίνε πιο ςοςτο να κάνυμε το λογαριαζμό μας με τις χιλιάδες, χορις να δόςυμε προςοχι ςτις εκατοντάδες, ςτις δεκάδες κε ςτις μονάδες, επιδι ι αριθμι αφτον τον τάκςεον, όταν λογαριάζυμε τυς κατίκυς μιας τέτιας πόλις ςαν το Μπακυ, ταλαντέβοντε απο μέρα ςε μέρα. Ενας τέτιος τρόπος ανταλαγις ενος αριθμυ με άλον αριθμον πυ να περιέχι λιγότερα ςιμαντικα πςιφία ονομάζετε ςτρονκίλοςι.

Στρονκιλόντας τυς αριθμυς τυ προβλιματος ςε χιλιάδες, θα έχυμε: 1913 — 334 000 κατίκυς, 1920 — 256 000 κατίκυς 1926 — 453 000 κατίκυς, 1931 — 590 000 κατίκυς.

Απ'τα 1913 ος τα 1926 ι κάτικι αφκςίθικαν κατα 119 000 ανθρόπυς. Απ' τα 1926 ος τα 1931 ι κάτικι αφκςίθικαν κάτα 137 000 ανθρόπυς.

Στιν τελεφτέα περίοδο ι κάτικι πλίθεναν ταχίτερα, παρα ςτιν προτερινι.

Στα προβλίματα με ςτρονκιλυς αριθμυς πάντα πρέπι να ιποδίχνετε, ςε μονάδες πιας ςιρας έχι ςτρονκιλοθι ο αριθμος.

Πολες φορες αφτο μας δίνετε απο το πρόβλιμα.

Ι. Κατα τιν ςτρονκίλοςι ακέρεον αριθμον ςε μονάδες οπιαςδίποτε ςιρας, τα πςιφία όλον τον ςιρον, πυ βρίςκυντε ςτα δεκςια τις ςτρονκιλεμένις τάκςις, αντικαθιςτύνε με μιδενικα.

Αν το πρότο πςιφίο, πυ αντικαθιςτάμε με μιδενικο ίνε μεγαλίτερο τυ 5 ίτε ίςο με τον 5, τότε το πςιφίο, πυ ςτέκετε ςτ' αριςτερά-τυ το αφκςένυν κατα μια μονάδα, εαν ίνε αφτο μικρότερο τυ 5, τότε δεν αλάζυν το αριςτερο πςιφίο.

Παραδίγματος χάριν, ο αριθμος 437 926 μετα τιν ςτρονκίλοςι ςε χιλιάδες θα γίνι: 438 000· ο αριθμος 284 631 μετα τιν ςτρονκίλοςι ςε εκατοντάδες θα γίνι 284 600· ο αριθμος 396 754 ίςτερα απο τιν ςτρονκίλοςι ςε εκατοντάδες θα γίνι: 396 800.

Ο πρότος αριθμος έχι ςτρονκιλοθι ος τιν ςιρα τον χιλιάδον, ο δέφτερος κε τρίτος — ος τιν ςιρα τον εκατοντάδον.

II. Εαν το πρότο ψιφίο, πυ αντικαθιστάμε με μιδενικο ιςύτε με 5, κε άλα ψιφία δεν ακολυθύνε, τότε το στρονκιλέβυμε έτσι, όστε το ψιφίο πυ βρίσκετε στ' αριστερα τυ 5 να μιν αλάκσι, αν ίνε άρτιο (ζιγο) ίτε το περισέβυμε κατα μια μονάδα, αν ίνε περιτος αριθμος (μονο).

Παραδίγματος χάριν, ο αριθμος 2 485 ίστερα απο τιν στρονκίλοσι τον δεκάδον, γίνετε 2 480.

Ο αριθμος 19 635, ίστερα απ' τιν στρονκίλοσι τον δεκάδον, γίνετε 19 640.

Σ ι μ ί ο σ ι. Για να δίκσυν ισότιτα κατα προσένκισι διο αριθμον ίτε παραστάσεον, ενόνυν αφτες με το σιμίο $\simeq$. Π. χ. $x \simeq 1\,800$ διαβάζετε έτσι: x κατα προσένκισι ισύτε με το 1 800.

IV. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΚΕ ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

§ 1. Πολαπλασιαζμος.

1. Το εργοστάσιο τράχτορ τυ Σταλινγκραντ, έβγαλε τιν πρότι μέρα τις δεκαμερίας 127 τράχτορ κε τι δέφτερι μέρα — 127 κ. υ. κ. σε διάστιμα 8 ιμερον εργασίας. Πόσα τράχτορ έβγαλε το εργοστάσιο σ' αφτες τις 8 ιμέρες;

Λ ί σ ι. Για να λίσυμε το πρόβλιμα τύτο, πρέπι να επαναλάβυμε οχτο φορες, τον αριθμο 127, σαν προσθετέο. Σίντομα το γράφυμε έτσι:

$$127 \times 8 = 1\,016,$$

δ λ. ο 127 πολαπλασιάζετε επι 8.

Τέτια πράκσι, πυ σιντομέβι τιν πρόσθεσι, ονομάζετε **πολαπλασιαζμος**.

Ο αριθμος 127 ονομάζετε **πολαπλασιαστέος**, ο αριθμος 8 **πολαπλασιαστις** κε ο αριθμος 1 016 — **γινόμενο**.

Οριζμος. **Το να πολαπλασιάζυμε ενα δεδομένο αριθμο, επι οπιοδίποτε άλον ακέρεο αριθμο, σιμένι — να επαναλάβυμε τον πολαπλασιαστέο ος προσθετέο τόσες φορες, όσες μονάδες περιέχι ο πολαπλασιαστις, κε να βρύμε το εξαγόμενο άθριζμα.**

Ος σιμία τυ πολαπλασιαζμυ χρισιμέβυν:

1) Ο πλάγιος σταβρος: $42 \times 3 = 126$ κε 2) ι τελία: $16 . 7 = 112$.

Το σιμίο τυ πολαπλασιαζμυ δεν τίθετε μπροστα στυς παράγοντες με τα γράματα.

Γράφυν: 1) ab αντις $a . b$ 2) $5x$ αντις $5 . x$.

Οριζμος. **Πολαπλασιαστέο ονομάζυν εκίνο τον αριθμο τον οπίο πολαπλασιάζυν. Πολαπλασιαστι ονομάζυν εκίνον τον αριθμο επι τον οπίον πολαπλασιάζυν. Γινόμενο ονομάζυν εκίνο τον αριθμο, πυ προκίπτι απο τον πολαπλασιαζμο.**

Π α ρ α τ ί ρ ι σ ι. Τον πολαπλασιαστέο κε τον πολαπλασιαστι, ονομάζυν επίσις κε π α ρ ά γ ο ν τ ε ς

Γραφτι παράστασι τυ πολαπλασιαζμυ με γράματα:

$$a.b = q$$

Τα γράματα a κε b παραστένυν τυς παράγοντες, κε το γράμα q το γινόμενο.

2. Να βρεθι το γινόμενο: α) 1.8, β) 7. 1, γ) 1. 1, δ) 0 . 7.

Λ ί σ ι. α) $1 . 8 = 8$, β) $7 . 1 = 7$, γ) $1 . 1 = 1$, δ) $0 . 7 = 0$.

Ι λίσις αφτες μας επιτρέπυν να κάνυμε τα ακόλυθα σιμπεράζματα.

Το γινομένο τις μονάδας επι οπιοδίποτε αριθμο, κε σινάμα το γινόμενο οπιοδίποτε αριθμυ επι τιν μονάδα, ισύτε με τον ίδιο αριθμο.

Το γινόμενο ισύτε με μιδενικο αν ένας απ' τυς παράγοντες ίνε μιδενικο.

3. Να βρεθι ο όνκος τυ δοματίυ, αν το μάκρος τυ δοματίυ ίνε 8 μ. το πλάτος 3 μ. κε το ίψος 4 μ.

Λ ί σ ι: Στιν περίπτοσι αφτι για να βρύμε τον όνκο πρέπι να πολαπλασιάσυμε το μάκρος επι το πλάτος κε επι το ίψος:

$$(8 . 3 . 4) \text{ κιβ. μ.}$$

Για τιν έβρεσι τυ γινόμενυ τριον δεδομένον παραγόντον πρέπι να πάρυμε το γινόμενο $8 . 3 = 24$, κε κατόπι να βρύμε τα γινόμενο $24 . 4 = 96$. Τότε θάχυμε:

$$8 . 3 . 4 = 96 \text{ κιβ. μ.}$$

Οριζμος. **Γινόμενο, τριον παραγόντον ονομάζυν τον αριθμο εκίνο, πυ προκίπτι απο τον πολαπλασιαζμο τυ γινόμενυ τον διο αριθμον επι τον τρίτο.**

§ 2. Προβλίματα, πυ λίνοντε με πολαπλασιαζμο.

1. Σ' ένα κολχοζ μαζέψανε τα κοκινογύλια σε 26 ιμέρες· κάθε μέρα κατα μέσο όρο μαζέβανε ανα 4 εχτάρια. Πόσα εχτάρια κοκινογυλιον έχυν μαζέψι;

Λ ί σ ι. 4 . 26 = 104 **εχτ.** Το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλασιαζμο. Εδο ο πολαπλασιαζμος αντικαθιστάι τιν πρόσθεσι ίσον προσθετέον.

2. Στο κολχοζ μπίκαν 120 νικοκιρια. Μετα ένα χρόνο ο αριθμος τον νικοκιριον, πυ μπίκαν στο κολχοζ μεγάλοσε τρις φορες. Πόσα νικοκιρια ίνε τόρα στο κολχοζ;

Κε αφτο το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλασιαζμο: 120 . 3 = 360 νιχοχιρια.

Εδο μεγαλόςαμε τον αριθμο κάμποςες φορες.

Μέσον τυ πολαπλασιαζμυ επι ακέρεο αριθμο, λίνυντε προβλίματα ςτα οπία πρέπι· 1) Να βρεθι το άθριζμα κάμποςον ίςον προςθετέον· 2) να μεγαλόςι ένας αριθμος κάμποςες φορες.

§ 3. Ι νόμι τυ πολαπλασιαζμυ.

1. *Μεταθετικος νόμος*. Να πολαπλαςιαςτυν 1) 3.5, 2) 2.3.7.

Αν θα βρύμε το γινόμενο μεταθέτοντας με όλυς τυς τρόπυς τυς παράγοντες κε παραβάλυμε τ' αποτελέζματα θάχυμε:

1) 3.5 = 5.3 = 15.

Αν εναλάκςυμε τι θέςι διο παραγόντον το γινόμενο δεν αλάζι.

Αφτο με γράματα γράφετε: $a.b = b.a$.

Ο ίδιος κανόνας ιςχίι κε για περιςότερυς παράγοντες.

2) 2.3.7 = 2.7.3 = 7.3.2 = 3.2.7 = 7.2.3 = 3.7.2 = 42.

Αφτο με γράματα γράφετε:

$$a.b.c = a.c.b. = b.a.c = b.c.a = c.\,a.\,b = c.b.a.$$

2. *Σινθετικος νόμος τυ πολαπλαςιαζμυ*. Πόςες λίτρες πετρέλεο χορι ςε ορθογόνιο δοχίο μάκρυς 4 **μ** πλάτος 3 **μ** κε ίπςυς 2 **μ**;

Για να βρύμε τι χοριτικότιτα τυ δοχίυ πρέπι να κάνυμε πολαπλαςιαζμο κε να βρύμε το γινόμενο 4.3.2. Ας βρύμε ςτιν αρχι το γινόμενο 4.3 κε ας πολαπλαςιάςυμε αφτο επι 2. Θα έχυμε:

(4.3).2 = 24 **κιβ. μ** = 24 000 **κιβ. ντμ** = 24 000 **λ**.

Ας πολαπλαςιάςυμε τόρα τυς αριθμυς αφτυς με άλι ςιρα:

2.(3 . 4) = 24 **κιβ. μ**.

Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο.

Το γινόμενο πολον παραγόντον δεν αλάζι, αν ενόςυμε τυς παράγοντες ςε οπιεςδίποτε ομάδες.

Αφτο γράφετε με γράματα: $a.b.c = a.(b.c) = (a.b).c$.

3. Το ακόλυθο παράδιγμα δίχνι, πόςο απλυςτέβι κάποτε τυς λογαριαζμύς-μας ι ιδιότιτα αφτι τυ γινομένυ.

2.2.2.3.5.5 = ;

Λ ί ς ι : Αν θα κάνυμε τον πολαπλαςιαζμο με τι ςιρα αφτι, θα έχυμε γινόμενο 600.

Ας κάνυμε τιν ίδια πράκςι με άλι ςιρα.

(2.5).(2.5).(2.3) = 10.10.6 = 600.

Το εκςαγόμενο ίνε το ίδιο, μα ι πράκςις-μας έχυν διεφκολινθι.

4. *Επιμεριςτικος νόμος*. Πόςα κιλα ντενεκε χριάζετε, για να ςκεπάςυμε τι ςτέγι απιθίκις, πυ έχι τρις πλαγιες: 2 **τετρ. μ**, 12 **τετρ. μ**. κε 2 **τετρ. μ** (1 **τετρ μ** φίλο ντενεκε ζιγίζι 5 **κιλα**);

Λ ί ς ι . Το γενικο εμβαδο τις ςτέγις: 2 + 12 + 2 = 16 **τετρ. μ**. Για να βρύμε το βάρος τυ ντενεκε, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το βάρος τυ 1 **τετρ. μ** επι τον γενικο αριθμο τον τετραγονικον μέτρον: 5 . 16 = 80 **χγ**.

Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε κε κατ' άλο τρόπο: να βρύμε το βάρος τυ ντενεκε, πυ ίνε απαρέτιτο για καθεμια πλαγια τις ςτέγις, κε κατόπιν να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

(2 + 12 + 2). 5 = 2 . 5 + 12 . 5 + 2.5 = 10 + 60 + 10 = 80 χγ.

Το αποτέλεζμα ίνε το ίδιο.

5. Ας πολαπλαςιάςυμε (27 + 13 + 4). 5 με διο τρόπυς:

1) προςθέτυμε όλυς τυς προςθετέυς τις παρένθεςις κε το άθριζμα το πολαπλαςιάζυμε επι 5

2) πολαπλαςιάζυμε κάθε προςθετέο χοριςτα επι 5 κε προςθέτυμε τα εκςαγόμενα τυ πολαπλαςιαζμυ. Κε ςτις διο περιπτόςις έχυμε το ίδιο αποτέλεζμα: 220.

Για να πολαπλαςιάςυμε άθριζμα επι οπιοδίποτε αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε καθένα προςθετέο χοριςτα επι τον αριθμο κε να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

Αφτο με γράματα γράφετε: $(a + b) . c = ac + bc$.

§ 4. Πολαπλαςιαζμος επι γινόμενο κε πολαπλαςιαζμος γινομένυ.

1. Να βρεθι το βάρος τυ τύβλυ ενος τίχυ, πυ έχι διαςτάςις 5 **μ**, 8 **μ** κε 2 **μ** κε το βάρος 1 **κιβ. μ** τύβλον 18 **τς**.

Λ ί ς ι . Για να λίςυμε το πρόβλιμα τύτο πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το βάρος 1 **κιβ. μ** τίχυ επι τον αριθμο τον κιβικον μέτρον τυ όνκυ.

18 . 5 . 8 . 2 = 90 . 8 . 2 = 720 . 2 = 1440 τς.

Τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ μπορύμε να τι γράψυμε κε αλιότικα.

Βρίςκυμε πρότα τον όνκο τυ τίχυ: 5 . 8 . 2 = 80 **κιβ. μ**, έπιτα το βάρος-τυ: 18 . 80 = 1440 **τς**.

Τα αποτελέζματα ίνε ίςα:

18 . 5 . 8 . 2 = 18 . 80, όπυ ο 80 ίνε γινόμενο τον αριθμον 5 . 8 . 2.

Για να πολαπλαςιάςυμε έναν αριθμο επι γινόμενο άλον κάμποσον αριθμον, αρκι να γράπςυμε τον πολαπλαςιαςτέο ςτο γινόμενο, ςαν παράγοντα κε κατόπιν να πολαπλαςιάςυμε ςίμφονα με τον κανόνα τις έβρεςις τυ γινομένυ κάμποσον παραγόντον.

Σ ι μ ί ο ς ι. Γράφοντας τι λίςι τυ προβλίματος, βρίκαμε το γινόμενο 18 . 5 . 8 . 2 = 1440. Γινόμενο ονομάζετε τόςο το δεκςιο, όςο κε το αριςτερο μέρος τις ιςότιτας.

2. Να βρεθι το γινόμενο (3. 5. 6). 8.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ι παρενθέςις δίχνυν, πος ι πράκςις, πυ βρίςκοντε μέςα-τυς πρέπι να γίνυν προτίτερα απο τις άλες πράκςις.

Λ ί ς ι. Τον πολαπλαςιαςμο τύτο μπορύμε να τον γράπςυμε κε ος εκςις:

$$(3.\ 5.\ 6).\ 8 = 3.\ 5.\ (6.\ 8) = 3.\ (5.\ 8).\ 6 = (3.\ 8).\ 5.\ 6 = 720.$$

Τα γινόμενα ς' όλες άφτες τις περιπτόςις θα ίνε ίςα.

Για να πολαπλαςιάςυμε γινόμενο κάμποσον αριθμον, επι οπιονδίποτε άλον αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε επι τον αριθμο αφτο έναν απο τυς παράγοντες, αφίνοντας όλυς τυς άλυς όπος ίνε.

§ 5. Πολαπλαςιαςμος αθρίςματος κε διαφοράς.

Τον κερο πυ μαθένυμε τις ιδιότιτες τον πράκςεον ςιχνα γράφαμε το άθριςμα, τι διαφορα κε το γινόμενο, χορις να τελιόνυμε τιν πράκςι.

1. Να γραφι το άθριςμα τον αριθμον 23 κε 15 κε να πολαπλαςιαςτι επι 6.

Λ ί ς ι. (23 + 15). 6 = 38. 6 = 228.

Εποφελύμενι τον επιμεριςτικο νόμο τυ πολαπλαςιαςμυ μπορύμε να κάνυμε τέτια λίςι:

$$(23 + 15).\ 6 = 23.\ 6 + 15.\ 6 = 138 + 90 = 228.$$

2. Να γραφι ι διαφορα τον αριθμον 37 κε 14 κε να πολαπλαςιαςτι επι 9.

Λ ί ς ι. (37 — 14). 9 = 26. 9 = 207.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Τις παραςτάςις (23 + 15) κε (37 — 14) ονομάζυμε άθριςμα κε διαφορα. Γι' αφτο τιν παράςταςι (23 + 15). 6, μπορύμε να ονομάςυμε γινόμενο αθρίςματος επι τον αριθμο 6, κε τιν παράςταςι (37 — 14). 9 — γινόμενο διαφορας επι τον αριθμο 9.

3. Ας δίκςυμε πος να πολαπλαςιάςυμε διαφορα επι ιονδίποτε αριθμο.

$$(7 - 4).\ 9 = 3.\ 9 = 27,$$

ίτε

$$(7 - 4).\ 9 = 7.\ 9 - 4.\ 9 = 63 - 36 = 27.$$

Σινκρίνοντας τις λίςις μπορυμε να γράπςυμε:

$$(7 - 4).\ 9 = 7.\ 9 - 4.\ 9.$$

Για να πολαπλαςιάςυμε τι διαφορα διο αριθμον επι έναν οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να πολαπλαςιάςυμε αφτον τον αριθμον χοριςτα επι το μιοτέο κε χοριςτα επι τον αφερετέο κε να αφερέςυμε απο το πρότο γινόμενο το δέφτερο.

Αφτο γράφετε με γράματα: $(a - b).\ c = ac - bc$.

4. (6 + 8 — 9). 4 = 5. 4 = 20,

$$(6 + 8 - 9).\ 4 = 6.\ 4 + 8.\ 4 - 9.\ 4 = 24 + 32 - 36 = 20.$$

§ 6. Πος αλάζι το γινόμενο όταν αλάζυν ι παράγοντες.

Για κςιλυργικες εργαςίες χριάζοντε 12 ςανίδια· τιν πρότι φορα δόςανε ςανίδια 4 μ × 25 ςμ × 3 ςμ. κε τι δέφτερι φορα ςανίδια 4 μ × 25 ςμ × 6 ςμ. Πόςες φορες μεγάλοςε το ποςο τον ςανιδιον, πυ δοθίκανε τι δέφτερι φορα ςχετικα με τιν πρότι;

Λ ί ς ι. Ο όνκος τυ ενος ςανιδιυ απο τιν πρότι παρτίδα:

$$400 \times 25 \times 3 = 30\ 000 \text{ κιβ. ςμ.}$$

Ο όνκος τυ ένος ςανιδιυ τις δέφτερις παρτίδας:

$$400 \times 25 \times 6 = 60\ 000 \text{ κιβ. ςμ.}$$

Βλέπυμε, πος απ' το μεγάλομα τυ ενος παράγοντα κατα διο φορες μεγάλοςε κε το γινόμενο 2 φορες.

Αν εμις ςτι θέςι τυ όνκο 400 × 25 × 6 = 60 000 κιβ. ςμ. πάρυμε τον όνκο 400 × 25 × 3 = 30 000 κιβ. ςμ θα δύμε, πος απο τιν ελάτοςι ενος παράγοντα κατα διο φορες, ελατόνετε όλο το γινόμενο 2 φορες.

I. Οςες φορες αφκςάνυμε ίτε ελατόνυμε έναν απ' τυς παράγοντες, τόςες φορες αφκςένι, ίτε ελατόνετε κε το γινόμενο.

Αν αντις ςανίδια απο τιν πρότι παρτίδα πάρυμε δοκάρια κοντίτερα, κατα διο φορες κε παχίτερα κατα διο φορες, τότε ο όνκος τυ δοκαριυ θα ιςύτε με τον όνκο τυ ςανιδιυ.

Κε τότε ςτι θέςι τον 400 × 25 × 3 = 30 000 κιβ. ςμ θα ίχαμε όνκο: 200 × 25 × 6 = 30 000 κιβ. ςμ.

II. Αν αφκςίςυμε τον ένα παράγοντα κάμποσες φορες κε ελατόςυμε τον άλο τόςες επίςις φορες, το γινόμενο δεν αλάζι.

§ 7. Πολαπλασιαζμος επι αριθμο με ένα σιμαντικο πσιφίο.

1. Τον πολαπλασιαζμο μονοπσίφιον αριθμον τον κάνυν σίμφονα με τον πίνακα τυ πολαπλασιαζμυ.

2. Ας δίχσυμε, πος γίνετε ο πολαπλασιαζμος επι αριθμυ, πυ έχι μονάδα κε μιδενικα.

Π α ρ ά δ ι γ μ α. Τεχνικι ατμόσφερα ονομάζετε ι πίεσι πυ εκσασκι 1 χγ πάνο σε τετραγονικο σαντίμετρο. Ι πίεσι μέσα στο καζάνι ισύτε με 35 ατμόσφερες. Πόσα χιλιόγραμα αποτελι ι πίεσι αφτι σε κάθε τετραγονικο μέτρο;

Οπος φένετε πρέπι να πολαπλασιάσυμε 35 επι 10 000. Για να βρύμε το γινόμενο ας πολαπλασιάσυμε πρότα τον 35 επι 10. Αφτο σιμένι πος κάθε μια μονάδα τυ αριθμύ-μας θα επαναλιφθι 10 φορες κε θα γίνι δεκάδα, κάθε μια δεκάδα θα γίνι εκατοντάδα κε θα έχυμε 35 δεκάδες, ι οπίες θα ισύντε με 350.

Απο τιν εκσοτερικι μορφί-τυ, το γινόμενο διακρίνετε απο τον πολαπλασιαστέο, μονάχα πυ έχι ένα περιτο μιδενικο στο τέλος. Ινε εφκολο να δύμε πος κατα τον πολαπλασιαζμο επι 100 πρέπι, για να βρύμε το γινόμενο, στο τέλος τυ πολαπλασιαστέυ να γράπσυμε διο μιδενικα, κατα τον πολαπλασιαζμο επι 1000 — τρία μιδενικα, κ.ο.κ.

Στο παράδιγμά-μας θάχυμε:

$$35 \cdot 10\,000 = 350\,000 \text{ χγ σε 1 τετρ. μ.}$$

Για να παλαπλασιάσυμε ακέρεο αριθμο επι 10, 100, 1000, αρκι να γράπσυμε στο τέλος τυ πολαπλασιαστέυ προς τα δεκσια τόσα μιδενικα, όσα έχι ο πολαπλασιαστις.

3. Τον πολαπλασιαζμο πολιπσίφιυ αριθμυ επι μονοπσίφιο εχτελύμε ος εκσις:

$$2\,437 \cdot 6 = (2\,000 + 400 + 30 + 7) \cdot 6 =$$
$$= 2\,000 \cdot 6 + 400 \cdot 6 + 30 \cdot 6 + 7 \cdot 6 =$$
$$= 12\,000 + 2\,400 + 180 + 42 = 14\,622.$$

Εδο αντικαθιστάμε τον πολαπλασιαστέο με άθριζμα προσθετέον κε βρίσκυμε το γινόμενο τυ αθρίζματος επι τον πολαπλασιαστι.

Τον πολαπλασιαζμο αρχίζυνε απο τις κατότερες σιρες κε γράφυνε έτσι:

$$\begin{array}{r} 2437 \\ \times\ 6 \\ \hline 14622 \end{array}$$

Πρότα πολαπλασιάζομε 7 επι 6, βρίσκυμε 42 μονάδες, γράφυμε το πσιφίο 2 κε κρατύμε τις 4 δεκάδες για να τυς προσθέσυμε κατόπιν στο γινόμενο τον δεκάδον. Πολαπλασιάζυμε τις 3 δεκάδες επι 6, κε βρί-

σκυμε 18. Προσθέτυμε τις 4 δεκάδες — βρίσκυμε 22 δεκάδες. Το πσιφίο 2 γράφυμε στι θέσι τον δεκάδον, κε κρατύμε τις 2 εκατοντάδες. Πολαπλασιάζυμε τις 4 εκατοντάδες επι 6. Βρίσκυμε 24. Προσθέτυμε τις 2 κρατύμενες εκατοντάδες· δίνυντε 26 εκατοντάδες, τις 6 εκατοντάδες γράφυμε στι θέσι τον εκατοντάδον κε κρατύμε τις διο χιλιάδες. Πολαπλασιάζυμε τις 2 χιλιάδες επι 6 κε στο γινόμενο προσθέτυμε τις κρατύμενες 2 χιλιάδες. Ετσι σχιματίζετε ο αριθμος 14 χιλιάδες. Τον γράφυμε στι θέσι τον χιλιάδον κε βρίσκυμε 14 622.

§ 8. Πολαπλασιαζμος αριθμον πυ τελιόνυν σε μιδενικα.

1. Να βρεθι το γινόμενο 353 . 800.

Γράφυμε:

$$353 \cdot 800 = 353\,(8 \cdot 100) = 353 \cdot 8 \cdot 100 =$$
$$= (353 \cdot 8) \cdot 100 = 2\,824 \cdot 100 = 282\,400.$$

Κατα τι γραφι ο αριθμος 800 ίνε σαν γινόμενο διο παραγόντον. Για να πολαπλασιάσυμε επι γινόμενο 8 . 100 μπορύμε πρότα να πολαπλασιάσυμε επι 8 έπιτα επι 100.

2. Να πολαπλασιασθυν: 1900 . 7 000.

Λ ί σ ι. $1\,900 \cdot 7\,000 = (19 \cdot 100) \cdot (7 \cdot 1\,000) =$
$= 19 \cdot 100 \cdot 7 \cdot 1\,000 = (19 \cdot 7) \cdot (100 \cdot 1000) =$
$= 133 \cdot 100\,000 = 13\,300\,000.$

§ 9. Πολαπλασιαζμος πολιπσίφιον αριθμον.

1. Να πολαπλασιασθυν 718 . 243.

Λ ί σ ι. Βασιζόμενι στον καταμεριστικο νόμο γράφυμε τιν πράκσι αφτι ος εκσις:

$$718 \cdot 243 = 243 \cdot 718 = (200 + 40 + 3) \cdot 718 = 718 \cdot 200 + 718 \cdot 40 +$$
$$+ 718 \cdot 3 = 143\,600 + 28\,720 + 2\,154 = 174\,474.$$

Για σιντόμεφσι γράφυν τυς αριθμυς σε στίλες:

$$\begin{array}{r} 718 \\ \times\ 243 \\ \hline 2\,154 \\ 28\,720 \\ 143\,600 \\ \hline 174\,474 \end{array}$$

Το 2 154 ίνε γινόμενο τυ αριθμυ 718 επι 3, το 28 720 ίνε γινόμενο τυ 718 επι 40, το γινόμενο 143 600 ίνε γινόμενο τυ 718 επι 200. Αφτα ονομάζοντε μερικα γινόμενα. Το δέφτερο μερικο γινόμενο ίνε γινόμενο 718 επι τις δ ε κ ά δ ε ς.

Το μετρικο αφτο γινόμενο πάντα τελιόνι σε μιδενικο, γι' αφτο δεν γράφυνε το 0, αλα το μετρικο γινόμενο έτσι, όστε το τελεφτέο σιμαντικο πσιφίο να βρεθι κάτο απ' τις δεκάδες. Γραφτι διατίποσι:

$$\begin{array}{r} 718 \\ \times\ 243 \\ \hline 2154 \\ 2872 \\ 1436 \\ \hline 174474 \end{array}$$

Πολαπλασιάζοντας επι τις εκατοντάδες βρίσκυμε τυς αριθμυς 718 . 200. Ο αριθμος 1436 θα ίνε ο αριθμος τον εκατοντάδον, γι' αφτο τον γράφυμε έτσι, όστε το τελεφτέο σιμαντικο πσιφίο-τυ να βρεθι κάτο απ' τις εκατοντάδες.

Τα μιδενικα στο τέλος τον μερικον γινομένον δεν γράφοντε.

2. Να πολαπλασιασθυν: 307 . 428.

Λίςι. Επιδι στον πρότο αριθμο ίνε ολιγότερα ςιμαντικα πςιφία, γι' αφτο τον γράφυμε πολαπλαςιαςτι. Ο πολαπλαςιαςτις δεν έχι δεκάδες, γι' αφτο κε λίπι το δέφτερο μερικο γινόμενο. Το ακόλυθο μερικο γινόμενο το γράφυν διο ςιρες αριςτερότερα.

```
   428
×  307
------
  2996
 1284
------
131396
```

Για να πολαπλαςιάςυμε πολιπςίφιο αριθμο επι πολιπςίφιο, πρέπι τον πολαπλαςιαςτέο να πολαπλαςιάζυμε χοριςτα επι τις μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες τυ πολαπλαςιαςτι κε να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

3. Να βρεθι το γινόμενο 18 . 2756.

Λίςι. Πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το 18 επι τον 2756. Αλα κςέροντας πος το γινόμενο δεν αλάζι απο τιν μετάθεςι τον παραγόντον, πολαπλαςιάζυμε τον 2756 επι 18. Αφτο ίνε καταλιλότερο.

$$2756 . 18 = 49\,608$$

Εαν ι παράγοντες δεν έχυν τον ίδιο αριθμο ςιμαντικον πςιφίον, τότε ίνε καταλιλότερο να πάρυμε για πολαπλαςιαςτι εκίνον τον αριθμο πυ έχι λιγότερα ςιμαντικα πςιφία.

§ 10. Ενια τις δίναμις τυ αριθμυ.

Οταν έχυμε να πολαπλαςιάςυμε ίςυς παράγοντες μπορύμε να απλοπιίςυμε τιν πράκςι-μας.

1. Να βρεθυν τα γινόμενα:

1) 3 . 3, 2) 2 . 2 . 2, 3) 3 . 3 . 3 . 3,
4) 5 . 5 . 5 . 5, 5) 10 . 10 . 10.

Για τέτια γινόμενα ιπάρχι άλος τρόπος με τον οπίο τα γράφυμε:

1) $3 . 3 = 3^2 = 9$, 2) $2 . 2 . 2 = 2^3 = 8$, 3) $3 . 3 . 3 . 3 = 3^4 = 81$
4) $5 . 5 . 5 . 5 = 5^4 = 625$, 5) $10 . 10 . 10 = 10^3 = 1000$

Ο πολαπλαςιαζμος ίςον παραγόντον ίνε νέα (πέμτι) πράκςι — ίπςοςι ςτι δίναμι. Το παράδιγμα πυ φέραμε 3^2 διαβάζετε έτςι: Τρία ςτι δέφτερι δίναμι· ίτε να βρεθι το γινόμενο διο παραγόντον, καθένας απο τυς οπίυς ιςύτε με τον 3. $2^3 = 2 . 2 . 2$, διαβάζετε έτςι: τον αριθμο 2 να τον ιπςόςυμε ςτιν τρίτι δίναμι, ίτε να βρύμε το γινόμενο τριον παραγόντον, πυ καθένας-τυς ιςύτε με 2.

2. Αν θα κάνυμε τιν πράκςι τον: 2^5, 3^4, 4^3, 7^3 πρέπι να βρύμε 32, 81, 64, 343.

Στιν παράςταςι $2^5 = 32$, ο αριθμος 2 ονομάζετε **βάςι** τις δίναμις, ο αριθμος 5 — **εκθέτις** τις δίναμις.

Οριζμι: **I. Βάςι τις δίναμις ονομάζετε εκίνος ο αριθμος τον οπίον πρέπι να ιπςόςυμε ςτι δίναμι.**

II. Ο αριθμος, πυ δίχνι πόςες φορες πρέπι να παρθι ι βάςι ος παράγοντας, ονομάζετε εκθέτις τις δίναμις.

Σιχνα για να απλυςτέβυν τι γραφι τυ αριθμυ με μιδενικα ςτο τέλος, γράφυν αφτον με τι βοίθια τυ εκθέτι τις δίναμις.

1) $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$
2) $5000 = 5 . 1000 = 5 . 10^3$.
3) $4\,000\,000 = 4 . 10^6$.

§ 11. Διέρεςι.

Διέρεςι ονομάζετε πράκςι αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο.

1. Κατα τιν διανομι τον ιςοδιμάτον τυ κολχοζ, φάνικε, πος το γενικο ετίςιο ιςόδιμα ίνε κατα μέςο όρο 725 ρύβλια ςε κάθε νικοκιριο. Το κολχοζ ίχε το όλο 800 νικοκιρια. Πόςο ίνε το γενικο ετίςιο ιςόδιμα τυ κολχοζ;

Λίςι. 725 . 800 = 580 000 ρυβλ.

Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με τον πολαπλαςιαζμο.

Ας λίςυμε αντίθετο πρόβλιμα.

2. 800 μονονικοκιρια, πυ ςχιμάτιςαν κολχοζ πίρανε γενικο ιςόδιμα 580 000 ρυβλ. Πόςα ρύβλια πίρε κατα μέςο όρο κάθε νικοκιριο;

Λίςι. 580 000 : 800 = 725 ρυβλ.

Στο αντίθετο αφτο πρόβλιμα βρίςκυμε ένα άγνοςτο παράγοντα (725) με το γνοςτο γινόμενο δίο παραγόντον (580 000) κε γνοςτο δέφτερο παράγοντα (800).

Για τι λίςι τυ δέφτερυ προβλίματος κάνυμε διέρεςι.

Οριζμος. **Διέρεςι λέγετε ι πράκςι, δια τις οπίας βρίςκετε ένας απο τυς παράγοντες, όταν ίνε γνοςτο το γινόμενο κε ο δέφτερος παράγοντας.**

Ι δεδομένι αριθμι κε κίνι πυ έχυν προκίπςι απο τιν διέρεςι έχυν δικές-τυς ιδιέτερες ονομαςίες:

1) το δεδομένο γινόμενο δίο παραγόντον ονομάζετε **διερετέος**,
2) ο δεδομένος παράγοντας ονομάζοντε **διερέτις**,
3) ο ζιτύμενος παράγοντας ονομάζετε **πιλίκο**.

Για να βρύμε το πιλίκο, διερύμε το διετερέο δια τυ διερέτι.

Οριζμος. **Διερετέος ονομάζετε εκίνος ο αριθμος τον οπίο διερυν. Διερέτις ονομάζετε εκίνος ο αριθμος με τον οπίον διερυν. Πιλίκο ονομάζετε εκίνος ο αριθμος, πυ τροκίπτι ος αποτέλεζμα απ' τι διέρεςι.**

Το ςιμίο τις διέρεςις ίνε (:) διο τελίες ίτε ι γραμι τυ κλάζματος.

3. Παράδιγμα. Το 12 να διερέςυμε δια 4. Το γράφυμε έτςι:

$$12 : 4 = 3, \quad \text{ίτε} \quad \frac{12}{4} = 3.$$

(διερετέος) : (διερέτις) = (πιλίκο). $\frac{\text{διερετέος}}{\text{διερέτις}}$ = πιλίκο.

Αν παραστίσυμε το διερετέο με το γράμα a, τον διερέτι με το γράμα b, το πιλίκο — με το γράμα q, τότε μπορύμε σιμβολικα να γράπσυμε τι διέρεσι με τα γράματα:

$$a : b = q, \text{ ίτε } \frac{a}{b} = q,$$

όπυ κε το αριστερο μέρος $(a : b)$ κε το δεκσιο (q) ονομάζυν πιλίκο.

§ 12. Ο πολαπλασιαζμος κε ι διέρεσι ίνε αμιβέα αντίστροφες πράκσις.

Απο τον οριζμο τις διέρεσις φένετε, πος ι διέρεσι τον αριθμον έχι σχέσι με τον πολαπλασιαζμο. Γι'αφτο κατα τιν διέρεσι διπσίφιον κε μονοπσίφιον αριθμον δια μονοπσίφιον χρισιμοπιύνε τον πίνακα τυ πολαπλασιαζμυ.

1. Να διερεθι ο 36 δια τυ 9.

Λίσι: $36 : 9 = 4$, επιδι απο τιν προπέδια τυ πολαπλασιαζμυ κσέρυμε, πος $4 \cdot 9 = 36$.

Ι διέρεσι κε ο πολαπλασιαζμος ίνε πράκσις αμιβέα αντίστροφες.

2. Ενα σοβχοζ κυβάλισε στο σταθμο διο παρτίδες σιτάρι κάθε μια απο 160 τς. Το σιτάρι αφτο φόρτοσαν εκσίσυ σε διο βαγόνια. Πόσο σιτάρι φορτόσανε στο κάθε βαγόνι;

Λίσι. $160 \cdot 2 = 320$ τς, $320 : 2 = 160$ τς.

Με τις παρενθέσις μπορύμε να γράπσυμε τι λίσι έτσι:

$$(160 \cdot 2) : 2 = 160 \text{ τς.}$$

Μπορύμε ακόμι να χρισιμοπιίσυμε κε το άλο σιμίο τις διέρεσις.

$$\frac{160 \cdot 2}{2} = 160 \text{ τς.}$$

Ο αριθμος 160 δεν άλακσε, όταν κάναμε μ' αφτον δίο αμιβέα αντίστροφες πράκσις — στιν αρχι πολαπλασιάσαμε επι 2, κε κατόπι το εκσαγόμενο γινόμενο διερέσαμε δια 2.

Απο τον πολαπλασιαζμο κε τιν διέρεσι, πυ κάναμε αλιλοδιαδοχικα με τον 2, δεν άλακσε ι αρχικι ακσία τυ αριθμυ, γι' αφτο κε στο εκσαγόμενο ίχαμε 160, ανεκσάρτιτα απο το αν πρότα, ίτε ίστερα τον πολαπλασιάζυμε, ίτε τον διερύμε με 2, ίτε κε αντίστροφα.

Αν τον δεδομένο αριθμο πολαπλασιάσυμε επι άλον ιονδίποτε κε ίστερα το εκσαγόμενο γινόμενο διερέσυμε δια τυ ίδιυ αριθμυ, τότε προκίπτι στο αποτέλεζμα, ο ίδιος αριθμος.

Ας γράπσυμε τιν ιδιότιτα αφτι με πσιφία κε γράματα.

$$1) \frac{15 \cdot 7}{7} = 15, \quad 2) \frac{a \cdot b}{b} = a$$

§ 13. Πράκσις διαφόρον βαθμίδον.

Ι τέσαρες κιριότερες αριθμιτικες πράκσις ίνε ανα δίο αντίστροφες ι μια προς τιν άλι: ι αφέρεσι αντρίστροφι με τιν πρόσθεσι, ι διέρεσι — με τον πολαπλασιαζμο.

Εχτος απ' το κσεχόριζμα τον πράκσεον σε αμιβέα αντίστροφες, διακρίνοντε ακόμα κε πράκσις διαφόρον βαθμίδον.

Ι βαθμίδα — πρόσθεσι κε αφέρεσι

ΙΙ βαθμίδα — πολαπλασιαζμος κε διέρεσι

ΙΙΙ βαθμίδα — ίπσοσι στιν δίναμι.

Στιν απλύστερι μορφί-τις ι πράκσι τις ανότερις βαθμίδας ίνε απλύστεπσι τις πράκσις τις προιγόμενις κατότερις βαθμίδας. Ετσι τον πολαπλασιαζμο $3 \cdot 5 = 15$ μπορύμε να γράπσυμε πιο εκτεταμένα με τιν πρόσθεσι:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15.$$

Μπορύμε επίσις να μάθυμε, πόσες φορες ο 5 χορι στον 15, διλαδι $15 : 5 = 3$, με τιν αφέρεσι $15 - 5 - 5 - 5 = 0$, διλ. να αφερέσυμε 3 φορες απο 5.

Μ' άλα λόγια, πολαπλασιαζμος επι ακέρεο αριθμο, ίνε πρόσθεσι ίσον προσθετέον κε ι διέρεσι δια ακερέυ αριθμυ, ίνε διαδοχικι αφέρεσι ενος κε τυ ιδίυ αριθμυ. Τον πολαπλασιαζμο κε τι διέρεσι μπορύμε να αντικαταστίσυμε με τιν πρόσθεσι κε τιν αφέρεσι. Τιν πρόσθεσι κε αφέρεσι ονομάζυν **πράκσις πρότις βαθμίδας**, ενο τον πολαπλασιαζμο κε τιν διέρεσι — **πράκσις δέφτερις βαθμίδας**.

Με παρόμιο τρόπο αντικαταστένυν με εχτεταμένι γραφι τυ πολαπλασιαζμυ ίσον παραγόντον με πιο σίντομι γραφι τις πράκσις ανίπσοσις σε δίναμι. Ι ανίπσοσι σε δίναμι σ' αφτι τιν περίπτοσι ίνε απλύστεπσι τυ πολαπλασιαζμυ.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ο πολαπλασιαζμος ίνε πράκσι **δέφτερις βαθμίδας** κε ι ανίπσοσι σε δίναμι — πράκσι **τρίτις βαθμίδας**.

§ 14. Προβλίματα, πυ λίνοντε με διέρεσι.

Κσέρυμε, πος ι διέρεσι ίνε πράκσι αντίστροφι με τον πολαπλασιαζμο. Γι' αφτο το κιριότερο πρόβλιμα απο κίνα πυ λίνυν με τι διέρεσι, ίνε ι έβρεσι τυ άγνοστυ παράγοντος όταν ίνε γνοστο το γινόμενο κε ένας απ' τυς παράγοντες.

1. Το γινόμενο ίνε 645, κε ένας απ' τυς παράγοντες 15, να βρεθι ο άλος παράγοντας.

Λίσι $\frac{645}{15} = 43.$

Το πρόβλιμα λίθικε με τι διέρεσι.

2. Το Σεπτέμβρι τυ 1929 στιν Αμερικι, λιόσανε 3 561 χιλ. **τόνυς** τσυγύνι· μετα δίο χρόνια, το Σεπτέμβρι τυ 1931 έχι λιγοστέπσι το λιόσιμό-τυ κατα 3 φορες. Πόσι τόνι τσυγυνιυ λιόθικαν το Σεπτέβρι τυ 1931 στιν Αμερικι;

Λίσι. Για να λίσυμε το πρόβλιμα πρέπι να λιγοστέπσυμε 3 φορες τον αριθμο 3 561.

$$3\,561 : 3 = 1\,187 \text{ χιλ τ.}$$

Αφτο ίνε δέφτερος τίπος προβλιμάτον, πυ λίνετε με τι διέρεσι.

3. Το κολχοζ πρέπι να πλιρόσι 4 525 εργατοιμέρες, γι' αφτο ορίσανε 9 050 ρ. Πόσο θα πλιρωθι ι εργατοιμέρα;

Λίσι: Επιδι κάθε μια εργατοιμέρα πλιρόνετε εκσίσυ, γι' αφτο για να λίσυμε το πρόβλιμα χριάζετε να διερέσυμε το 9 050 ρ. σε 4 525 ίσα μέρι:

$$9\,050 : 4\,525 = 2 \text{ ρ.}$$

Κε αφτο το πρόβλιμα λίνετε επίσις με διέρεσι.

4. Σε κάθε αφτοκίνιτο μπορύμε να καθίσυμε 25 άνθροπι. Πόσα τέτια αφτοκίνιτα χριάζοντε για 300 ανθρόπυς; Εδο πρέπι να βρύμε πόσες φορες ο αριθμος 25, χοράι στον αριθμο 300. Αφτο το βρίσκυν με τι διέρεσι.

Λίσι: 300 : 25 = 12 αφτοκίνιτα.

5. Διο ομάδες εργατον κσεφορτόνυν τύβλα. Ι μια ομάδα κατα τιν εργασία-τις κάνι 42 τύβλα σκάρτα στι χιλιάδα, ι άλι 14 κομάτια. Πια ομάδα κάνι περισότερα τύβλα σκάρτα κε πόσες φορες.

Λίσι. Για να λίσυμε το πρόβλιμα αφτο πρέπι να διερέσυμε τον αριθμο 42 δια τυ 14 κε θα έχυμε 42 : 14 = 3 διλ. ι πρότι ομάδα κάνι τρις φορες περισότερο σκάρτα, ίτε ι δέφτερι ομάδα τρις φορες ολιγότερο.

Στο πρόβλιμα αφτο σινκρίνοντε διο αριθμι μέσον τις διέρεσις. Ετσι λιπον:

Με τιν διέρεσι λίνοντε προβλίματα όταν πρέπι:

1) Να βρεθι ο άγνοστος παράγοντας, κσέροντας το γινόμενο κε τον ένα παράγοντα.

2) Να λιγοστέπσι ο αριθμος κάμποσες φορες.

3) Να διερεθι ο αριθμος σε ίσα μέρι.

4) Να σινκριθυν διο αριθμι μετακσί τυς: να βρεθι πόσες φορες ο ένας αριθμος χορι στον άλο (πόσες φορες ο ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος, ίτε μικρότερος απ' τον άλο).

Σιμίοσι I. Τα προβλίματα στι διέρεσι δεν ίνε δινατον να λιθυν έτσι όστε το εκσαγόμενο νάνε ακέρεος αριθμος.

6. Να ελατοθι ο αριθμος 15 κατα 7 φορες. Ι λίσι τυ προβλίματος δεν μπορι να παρασταθι με ακέρεο αριθμο.

Το 15 επίσις δεν μπορι να διερεθι σε 7 ίσα μέρι, πυ να παραστένυν ακέρεο αριθμο, ίτε παραβάλοντας το 15 κε 7 μέσον τις διέρεσις, να παραστίσυμε το εκσαγόμενο τις σίνκρισις με ακέρεο αριθμο.

Παρατίρισι. II. Με τιν πρόσθεσι κε τον πολαπλασιαζμο επι ακέρεο εμις μεγαλόνυμε τον αριθμο. Ι αφέρεσι κε ι διέρεσι δια ακέρεο χρισιμέβυν για να ελατόσυμε τον αριθμο. Οστόσο ιπάρχι διαφορα στο χαραχτίρα τις άφκσισις κε τις ελάτοσις αφτις, στιν οπία πρέπι να δόσυμε ιδιέτερι προσοχι.

Με τιν πρόσθεσι αφκσάνυν τον αριθμο κατα *κάμποσες μονάδες*.

Ο πολαπλασιαζμος επι αριθμυ μεγαλίτερυ τις μονάδας, επιτρέπι να αφκσίσυμε τον αριθμο *κάμποσες φορες*.

Ι αφέρεσι επιτρέπι να ελατόσυμε τον αριθμο *κατα κάμποσες μονάδες*.

Ι διέρεσι δι' αριθμυ μεγαλίτερυ τις μονάδας, επιτρέπι να ελατόσυμε τον αριθμο *κάμποσες φορες*.

§ 15. Ι εκσάρτισι μετακσι τον δεδομένον κε εκσαγομένον αριθμον κατα τον πολαπλασιαζμο κε τιν διέρεσι.

1. Ενα εργοστάσιο ανταλαχτικον για τράχτορ, μπορι να βγάλι τιν ιμέρα κατα μέσον όρο, πριιόντα ακσίας 11 200 ρυβ. Πόσι ίνε ι ακσία τον ανταλαχτικον για 15 μέρες;

Λίσι. 11 200 . 15 = 168 000 ρύβλια.

Ας κάνυμε αντίθετο πρόβλιμα.

2. Για 15 ιμέρες το εργοστάσιο έβγαλε ανταλαχτικα για τράχτορ ακσίας 168 000 ρυβλίον. Πρέπι να βρεθι πάνο στι βάσι αφτον τον δεδομένον, ι ακσία αφτον σε μια μέρα.

Λίσι. 168 000 : 15 = 11 200 ρύβλια.

Εκσετάζοντας τι λίσι αφτον τον διο προβλιμάτον, βλέπυμε πος κσέροντας το γινόμενο 168 000 ρύβλια κε έναν απ' τυς παράγοντες τον 15, μπορύμε να βρύμε τον άλο παράγοντα σίμφονα με τον ακόλυθο κανόνα.

I. Ενας απο τυς διο παράγοντες ισύτε με το γινόμενο, διερεμένο με τον δέφτερο παράγοντα.

Ας γράπσυμε τον κανόνα τύτο με γράματα:

Αν $a \,.\, b = q$ (I), τότε $a = \frac{q}{b}$ (II) ίτε $b = \frac{q}{a}$ (III).

Ι πρότι ισότιτα δίχνι πος ο διερετέος q ισύτε με το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίκο (a κε b).

Ας δοκιμάςυμε ςτο ακόλυθο παράδιγμα τιν αλίθια τις εκςάρτιςις αφτις.

3. Να διερέςυμε κε να δοκιμάςυμε τι διέρεςι:

$$\frac{360}{24}.$$

Λ ί ς ι. $\frac{360}{24}=15.$

Δ ο κ ι μ ι. Το 360 πρέπι να ιςύτε με το 24 . 15, όπυ το 360 ίνε ο διερετέος, το 24 — ο διερέτις, κε το 15 — το πιλίκο. Κε πραγματικα.

$$360=24\cdot 15.$$

II. Ο διερετέος ιςύτε με το διερέτι επι το πιλίκο.

Μπορύμε τι δοκιμι να κάνυμε αλιότικα — με τιν διέρεςι:

$$360:15=24.$$

Διερόντας το διερετέο δια τυ πιλίκυ, βρίςκυν τον διερέτι.

III. Ο διερέτις ιςύτε με τον διερετέο, διεριμένυ δια τυ πιλίκυ.

Τα ςιμπεράςματα πυ κάναμε μας επιτρέπυν να βρίςκυμε τον άγνοςτο παράγοντα, το άγνοςτο διερετέο ίτε τον διερέτι.

Στα παρακάτο παραδίγματα πρέπι να βρεθι ο άγνοςτος αριθμος, πυ ςιμιόνετε με το γράμα x.

1. $40x=280.$

Λ ί ς ι . Στο παράδιγμα αφτο ίνε άγνοςτος ένας παράγοντας. Γνοςτι ίνε το γινόμενο κε ο άλος παράγοντας.

Σίμφονα με τον πρότο κανόνα:

$$x=\frac{280}{40}=7.$$

2. $x\cdot 70=350.$

Λ ί ς ι . Το παράδιγμα αφτο, διαφέρι απο το προιγύμενο κατα τύτο, ότι ο άγνοςτος παράγοντας ςτέκετε ςτιν πρότι θέςι. Ι λίςι ίνε ι ιδία:

$$x=\frac{350}{70}=5.$$

3. $\frac{x}{16}=12$, ίτε $x:16=12$.

Λ ί ς ι. Το παράδιγμα αφτο μπορύμε να το λίςυμε, εποφελύμενι τον δέφτερο κανόνα x — διερετέος, 16 — διερέτις, 12 — πιλίκο.

$$x=12\cdot 16=192.$$

4. $187:x=11$, ίτε $\frac{187}{x}=11$.

Λ ί ς ι. Στο παράδιγμα αφτο ίνε γνοςτι ο διερετέος κε το πιλίκο, να βρεθι ο διερέτις.

Ο τρίτος κανόνας οδιγι ςτιν ακόλυθι λίςι:

$$\frac{187}{11}=x,\ x=17.$$

Μπορύμε ςτο παράδιγμα αφτο να δόςυμε άλι εκςίγιςι, εκλαμβάνοντας τον x κε τον 11 ςαν παράγοντες, κε το 187 — ςαν γινόμενό-τυς. Ι μετάθεςι τον παραγόντον δεν αλάζι το γινόμενο καθος κε αφτυς τυς παράγοντες.

$11\cdot x=187$, μπορύμε να βρύμε τον άγνοςτο παράγοντα:

$$x=\frac{187}{11}=17.$$

§ 16. Δοκιμι τυ πολαπλαςιαςμυ κε τις διέρεςις.

Ι κανόνες τις προιγύμενις παράγραφυ δίνυν απλυς τρόπυς δοκιμις τυ πολαπλαςιαςμυ κε τις διέρεςις.

1. Να γίνι ι δοκιμι τυ πολαπλαςιαςμυ:

$$406\cdot 78=31\,668.$$

Δ ο κ ι μ ι: $31\,668:406=78.$

I. Για να κάνυμε τι δοκιμι τυ πολαπλαςιαςμυ, μπορύμε να διερέςυμε το γινόμενο με έναν απ' τυς παράγοντες κε το εκςαγόμενο πρέπι να δόςι το δέφτερο παράγοντα.

2. Να γίνι ι δοκιμι τις διέρεςις:

$$16\,050:642=25.$$

Δ ο κ ι μ ι . 1) $642\cdot 25=16\,050$, ίτε 2) $16\,050:25=642$.

II. Για να κάνυμε τι δοκιμι τις τέλιας διέρεςις μπορύμε: 1. να πολαπλαςιάςυμε το πιλίκο επι τον διερέτι, κε το εβριςκόμενο πρέπι να δόςι το διερετέο.

2. Να διερέςυμε τον διερετέο δια τυ πιλίκυ κε το εβριςκόμενο πρέπι να δόςι τον διερέτι.

§ 17. Ι αλαγι τυ πιλίκυ.

1. Πόςα ανιχτα βαγόνια χριάζοντε για τι μεταφορα 16 **χιλ. τόνον** τςυγυνιυ, αν κάθε ανιχτο βαγόνι πέρνι 16 **τόνυς**;

Λ ί ς ι . $16\,000:16=1000$ αν. βαγόνια.

2. Πόσα ανιχτα βαγόνια τις ίδιας χοριτικότιτας χριάζοντε για τι μεταφορα 48 χιλ. **τον.** τσογονιυ.

Λίσι. 48 000 : 16 = 3 000 αν. βαγόνια.

Σινκρίνοντας τι λίσι τυ προβλίματος αφτυ, με τι λίσι τυ πρότυ, βλέπυμε, πος μεγαλόνοντας το φορτίο 3 φορες, μεγαλόνι κε ο αριθμος τον βαγονιον επίσις 3 φορες. Ο διερετέος κε το πιλίκον άλακσαν: κε ι διό-τυς μεγάλοσαν κατα 3 φορες.

I. Οσες φορες αφκσένυμε, ίτε ελατόνυμε τον διερετέο, τόσες φορες αφκσάνετε ίτε ελατόνετε κε το πιλίκο.

Ο χανόνας τις ελάτοσις θα ίνε αντιλιπτο;, αν αλάκσυμε τι θέσι τον προβλιμάτον 1 κε 2 κε αν σινκρίνυμε τις λίσις-τυς.

3. Πόσα μεγάλα ανιχτα βαγόνια πρέπι νάχυμε για να μεταφέρυμε 48 χιλ. **τον.** τσογονιυ αν σε καθένα βαγόνι χορι 48 **τ**;

Λίσι: 48 000 : 48 = 1 000 βαγόνια. Ας σινκρίνυμε το πρόβλιμα τύτο με το πρόβλιμα 2.

Στιν περίπτοσι αφτι το βάρος τυ φορτίυ κάθε βαγονιυ έχι αφκσιθί 3 φορες, κε ο αριθμος τον βαγονιον λιγόστεπσε 3 φορες.

Αλακσε ο διερέτις γι' αφτο άλακσε κε το πιλίκο.

II. Αν αφκσίσυμε το διερέτι κάμποσες φορες, τότε τόσες φορες ελατόνετε κε το πιλίκο. Εαν ελατόσυμε το διερέτι κάμποσες φορες, τότε τόσες φορες αφκσένι το πιλίκο.

4. Πόσα βαγόνια χριάζοντε για τιν μεταφορα 144 χιλ. **τ.** φορτίυ αν σε καθένα χορι 48 **τ**;

Λίσι. 144 000 : 48 = 3 000 βαγόνια.

Σινκρίνοντας τα προβλίματα 4 κε 2, βλέπυμε, πος ι άφκσισι τυ διερετέυ επι 3, μεγάλοσε το πιλίκο 3 φορες, κε σινάμα χάρις στιν άφκσισι τυ διερέτι τρις φορες, το πιλίκο λιγόστεπσε 3 φορες κε στο τέλος, έμινε το ίδιο.

III. Αν αφκσίσυμε ίτε ελατόσυμε το διερετέο κε το διερέτι με τον ίδιο αριθμο, τότε το πιλίκο δεν αλάζι.

Τον ίδιο χανόνα μπορύμε να διατιπόσυμε κι αλιότικα.

1. Αν πολαπλασιάσυμε το διερετέο κε το διερέτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο, το πιλίκο δεν αλάζι.

2. Αν διερέσυμε το διερετέο κε τον διερέτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο το πιλίκο δεν αλάζι.

§ 18. Διέρεσι τυ γινόμενυ κε τυ αθρίζματος.

Διέρεσι τυ γινόμενυ. 1. Να μιρασθυν σε διο ίσα μέρι 10 **λ.** βενζίνας κε να βρεθι το βάρος κάθε μισυ. 1 **λ.** βενζίνα ζιγίζι 700 γ.

Λίσι. Μπορύμε να λίσυμε το πρόβλιμα με διο τρόπυς.

1-ι. *λίσι.* Βρίσκυμε το βάρος όλις τις βενζίνας κε κατόπι το βάρος τυ μισυ ποσυ.

$$700 . 10 = 7\,000 \text{ γ.}, \quad 7\,000 : 2 = 3\,500 \text{ γ.}$$

2-ι *λίσι.* Διερύμε το ποσο τις βενζίνας σε διο ίσα μέρι κε βρίσκυμε το βάρος κάθε μισυ μέρυς.

$$700 . (10 : 2) = 700 . 5 = 3\,500 \text{ γ.}$$

Το εκσαγόμενο ίνε το ίδιο κε στιν πρότι κε στι δέφτερι περίπτοσι.

$$(700 . 10) : 2 = 700 . (10 : 2) = 3\,500.$$

Στιν πρότι περίπτοσι βρίσκυμε πρότα το γινόμενο τον διο παραγόντον, κε έπιτα διερύμε αφτο δια 2. Στι δέφτερι περίπτοσι διερύμε δια 2 τον έναν απο τυς παράγοντες, έπιτα βρίσκυμε το γινόμενο επι τον δέφτερο παράγοντα.

Για να διερέσυμε το γινόμενο διο παραγόντον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέσυμε με τον ίδιο αριθμο τον ένα απο τυς παράγοντες κε το πιλίκο να πολαπλασιάσυμε επι τον άλον παράγοντα.

Αφτο γράφετε με γράματα: $(a . b) : m = \frac{a}{m} \cdot b = a \cdot \frac{b}{m}$.

Ο χανόνας αλιθέβι κι αν έχυμε περισότερυς παράγοντες.

2. Πρέπι το γινόμενο τον αριθμον 3, 12 κε 8 να διερέσυμε δια 2.

$$(3 . 12 . 8) : 2 = \frac{288}{2} = 144,$$

ίτε

$$(3 . 12 . 8) : 2 = 3 . 6 . 8 = 3 . 12 . 4 = 144$$

Στον δέφτερο τρόπο διερύμε δια τυ 2 τον ένα απο τυς παράγοντες (12 · 8) αντις να διερέσυμε το γινόμενό-τυς.

Διέρεσι τυ αθρίζματος. 3. Ενας τραχτορίστας πίρε για το πρότο ίμισι τυ μίνα 84 ρύβ. κε για το δέφτερο — 91 ρύβ. Πόσες εργατοιμέρες ίχε ο τραχτορίστας στον μίνα αφτο, αν για κάθε εργατο-ιμέρα κέρδιζε 7 ρύβλια;

Λίσι. Το πρόβλιμα αφτο μπορύμε να λίσυμε με διο τρόπυς.

Μπορύμε να προσθέσυμε όλα τα χρίματα πυ πίρε κε να διερέσυμε αφτα δια τυ 7, ίτε να βρύμε χοριστα τον αριθμο τον εργατοιμερον τυ πρότυ κε δέφτερυ ίμισι τυ μίνα.

ίτε

$$(84+91):7=175:7=25 \text{ μέρες.}$$

$$84:7+91:7=12+13=25 \text{ μέρες.}$$

Σινκρίνοντας τα εκςαγόμενα, μπορύμε να γράπςυμε τιν ιςότιτα.

$$(84+91):7=84:7+91:7=12+13=25.$$

Για να διερέςυμε το άθριζμα διο αριθμον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε με τον αριθμο αφτο καθένα προςθετέο χοριςτα κε να προςθέςυμε τα εβριςκόμενα πιλίκα.

Αφτο γράφετε με γράματα: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

Ο κανόνας αφτος αλιθέβι κε για το άθριζμα τριον, τεςάρον κε γενικα πολον προςθετέον.

4. Ας διερέςυμε $(140+280+360):10$.

$$(140+280+360):10=140:10+280:10+360:10=14+ \\ +28+36=78,$$

ίτε

$$\frac{780}{10}=78.$$

Αφτο γράφετε με γράματα:

$$\frac{a+b+c+d}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}.$$

Παρόμιος κανόνας ιπάρχι κε για τι διέρεςι τις διαφορας.

Διέρεςι τις διαφορας. 5. Τι διαφορα τον διο αριθμον 375 κε 255 να διερέςυμε δια το 15.

Λ ί ς ι. 1) $(375-255):15=\frac{120}{15}=8$, ίτε

2) $(375-255):15=(375:15)-(255:15)=25-17=8.$

Το αποτέλεςμα ίνε το ίδιο.

Για να διερέςυμε τι διαφορα διο αριθμον με οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε χοριςτα το μιοτέο κε αφερετέο με τον αριθμο αφτο κε απ' το πρότο πιλίκο να αφερέςυμε το δέφτερο.

Παράςταςι το κανόνα με γράματα: $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ι διέρεςι τυ αθρίζματος κε τις διαφορας δι' ακέρεο αριθμο, μονάχα τότε μπορι να διεκςαχθι με τον τρόπο αφτο, όταν ι προςθετέι, ίτε ο μιοτέος κε αφερετέος, διερύντε δια το αριθμο αφτο, δίνοντας ακέρεο αριθμο ςτο πιλίκο.

§ 19. Διέρεςι με αριθμο, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα.

Αν ςινκρίνυμε τυς αριθμυς: 541 κε 5410, θα δύμε, πος ο δέφτερος αριθμος ίνε 10 φορες μεγαλίτερος απ' τον πρότο, πος ο αριθμος τον εκατοντάδον τυ πρότυ αριθμυ αποτελι τις χιλιάδες τυ δέφτερυ, ο αριθμος τον δεκάδον — τις εκατοντάδες, τον μονάδον — τις δεκάδες, ίτε ότι πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον πρότο αριθμο επι 10 για να βρύμε το δέφτερο.

Αν γράπςυμε τυς αριθμυς αφτυς κατ' αντίθετι ςιρα — κατα τι ςιρα τις ελάτοςις τον μεγεθόν-τυς: 5410, 541, τότε ο ακόλυθος αριθμος ίνε μικρότερος το προιγυμένυ-τυ, γι' αφτο τον προιγύμενο αριθμο πρέπι να διερέςυμε δια 10, για να βρύμε τον ακόλυθο, κατα τι διέρεςι δια 10 ακέρευ αριθμυ με μιδενικα ςτο τέλος, (κατα τιν ελάτοςι αφτυ 10 φορες) ίταν ανάνκι να εκςαλίπςυμε ένα μιδενικο.

Κατα τι διέρεςι αριθμυ δια 100 πρέπι να διερέςυμε αφτον δια 10 κε το εβριςκόμενο πιλίκο να διερέςυμε ακόμι μια φορα δια 10 (να εκςαλίπςυμε διλ. διο μιδενικα απο το τέλος). Το ίδιο κάνυμε κι όταν διερύμε με 1 000, 10 000... — με κάθε αριθμο πυ έχι τι μονάδα με τα μιδενικα ςτο τέλος, διλ. δια τις δίναμις τυ αριθμυ 10 θα διερέςυμε ςινεχος δια 10.

1) $4\,513\,000:100=(4\,513\,000:10):10=451\,300:10=45\,130,$

2) $356\,000:1\,000=(356\,000:10):10:10=(35\,600:10):10=$
$=3\,560:10=356.$

Στα παραδίγματα αφτα ο διερετέος τελιόνι ςε μιδενικα, κε ο διερέτις ίνε αριθμος, πυ παραςτένι τι μονάδα με τα μιδενικα. Κατα τι διέρεςι ςτο διερετέο μπορύςαμε αμέςος να εκςαλίπςυμε τόςα μιδενικα, όςα ιπάρχυν ςτο διερέτι. Μπορύςαμε να εχτελέςυμε τι διέρεςι δι' ακερέυ, γιατι ο διερετέος έχι ςτο τέλος-τυ τόςα μιδενικα, όςα έχι ο διερέτις, ίτε κε περιςότερα.

Για να διερέςυμε αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα, δια αριθμυ, πυ παραςτένι τι μονάδα με τα μιδενικα ςτο τέλος-τυ, πρέπι να εκςαλίπςυμε απο το διερετέο τόςα μιδενικα, όςα έχι ο διερέτις.

§ 20. Διέρεςι αριθμον, πυ τελιόνυν ςε μιδενικα.

Ι ακςία τις καθιμερινις παραγογις τυ εργοςτασίυ εχτιμάτε 128 000 ρυβλ. Το εργοςτάςιο βγάζι 400 τ. τςυγυνιυ. Να βρεθι ι μέςι ακςία τυ 1 τόνυ τςυγυνιυ.

Λίςι. Εδο πρέπι να κάνυμε διέρεςι 128 000 : 400. Εμις όμος μπορύμε να απλυςτέπςυμε τι λίςι, μικρένοντας το διερετέο κε το διερέτι κατα 100 φορες. Με τιν πράκςι αφτι το πιλίκο δεν αλάζι.

128 000 : 400 = 1 280 : 4 = 320 ρύβλια.

Για να βρύμε το πιλίκο, ςτιν περίπτοςι κατα τιν οπία ο διερετέος κε ο διερέτις τελιόνυν ςε μιδενικα, αρκι να εκςαλίπςυμε απο το τέλος-τυς τον ίδιο αριθμο μιδενικον. Το πιλίκο απ' αφτο δεν μεταβάλετε.

§ 21. Διέρεςι ςτιν περίπτοςι, πυ προκίπτι μονοπςίφιο πιλίκο.

1. Να βρεθι το πιλίκο: 651 : 217.

Λίςι. Διερύμε μονάχα εκίνα τα πςιφία, τα οπία μπορύμε να διερέςυμε ςίμφονα με τον πίνακα τυ πολαπλαςιαςμυ. Γι' αφτο πέρνυμε τις μονάδες τις ανότερις ςιρας τυ διερετέυ κε τις διερύμε δια τον μονάδον τις ανότερις ςιρας τυ διερέτι.

Στο παράδιγμά-μας διερύμε τον 6 δια 2 κε βρίςκυμε: 6 : 2 = 3. Τότε 651 : 217 = 3. Δοκιμάζυμε αν ίνε ςοςτο το αποτέλεςμα, πολαπλαςιάζοντας το διερέτι επι το πιλίκο.

217 . 3 = 651.

Αν το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ, ίνε αριθμος μικρότερος τυ πρότυ πςιφίυ τυ διερέτι, τότε πέρνυμε τον αριθμο, πυ ςχιματίζετε απ' τα διο πρότα πςιφία τυ διερετέυ κε τον διερύμε δια τυ πρότυ πςιφίυ τυ διερέτι.

2. 20 595 : 4 119 = 5.

Εδο διερύμε τον 20 δια τυ 4. Αν ι δοκιμι δίνι γινόμενο μεγαλίτερο τυ διερετέυ, τότε ςτο πιλίκο, πρέπι να γράπςυμε αριθμο μικρότερο κατα μια μονάδα κε κςανα δοκιμάζυμε τι διέρεςι. Ετςι εκςακολυθύμε τιν πράκςι οςότυ, να βρύμε ςτο πιλίκο αριθμο, τον οπίο πολαπλαςιάζοντας επι τον διερέτι, να δόςι γινόμενο μικρότερο τυ διερετέυ, ίτε ίςο μ' αφτον. Ο τρόπος αφτος τις διέρεςις, για να βρύμε μονοπςίφιο πιλίκο απετι ο διερετέος να έχι τόςα πςιφία, όςα έχι ο διερέτις (αν το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ παριςτένι αριθμο μεγαλίτερο απο το πρότο πςιφίο τυ διερέτι), ίτε κατα ένα περιςότερο (αν ο αριθμος, πυ παριςτένι το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ, ίνε μικρότερος τυ διερέτι).

Ιπάρχι ακόμα ένας τρόπος, πυ επιτρέπι να καθορίςυμε κίνες τις περιπτόςις τις διέρεςις, όταν ςτο πιλίκο βρίςκυμε μονοπςίφιο αριθμο.

Δόθικαν διο αριθμι: διερετέος κε διερέτις: γράφυμε απ' τα δεκςια ςτο τελος τυ διερετέυ μιδενικο. Βρίςκυμε νέο αριθμο, μεγαλίτερο τυ διερέτι δέκα φορες. Αν ο νέος αφτος αριθμος θάνε μεγαλίτερος τυ διερετέυ, τότε το πιλίκο απ' τι διέρεςι τον διο δεδομένον αριθμον θάνε μονοπςίφιο, — αν μικρότερος, πολιπςίφιο.

Τα παραδίγματα τις παραγράφυ αφτυ μας δίνανε μονοπςίφιο πιλίκο επιδι.

1) 2 170 > 651 κε 41 190 > 20 595.

Για να βρύμε μονοπςίφιο πιλίκο, πρέπι να πάρυμε το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ κε να το διερέςυμε δια τυ πρότυ πςιφίυ τυ διερέτι. Ιςτερα απ' αφτο πρέπι να πολαπλαςιάςυμε το διερέτι επι το εκςαγόμενο μονοπςίφιο πιλίκο. Το γινόμενο, πυ προκίπτι πρέπι να ιςύτε με το διερετέο. Αν το γινόμενο αφτο ίνε μεγαλίτερο απ' το διερετέο, πρέπι να λιγοςτέπςυμε το πιλίκο κατα μια μονάδα. Ετςι εκςακολυθυν οςότυ το γινόμενο πυ προκίπτι, δεν ιςύτε με το διερετέο. Αν κατα τιν διέρεςι μένι ιπόλιπο, τότε αφτο πάντα πρέπι να ίνε μικρότερο απο το διερέτι.

Στις περιπτόςις εκίνες, όταν το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ ίνε αριθμος μικρότερος τυ πρότυ πςιφίυ τυ διερέτι, ςτο διερετέο πέρνυν τον αριθμο, πυ αποτελίτε απο τα διο πρότα πςιφία τυ διερετέυ.

§ 22. Διέρεςι με ιπόλιπο.

Πάντα δεν ίνε δινατο να γίνι ι διέρεςι χορις ιπόλιπο.

1. Ο πατέρας έδοςε ςτο γιό-τυ 2 ρύβ. για ν' αγοράςι ιλεχτρικι λάμπα. Στο μαγαζι βρέθικαν μονάχα λάμπες ακςίας 75 καπ. ι κάθε μια. Πόςες λάμπες μπορι να αγοράςι το πεδι κε πόςα ρέςτα θα πάρι;

Λίςι. Διερόντας το 200 δια 75, θα έχυμε πιλίκο 2 κε θα μίνυν 50 καπίκια. Το πεδι μπόρεςε να αγοράςι διο λάμπες κε τυ έδοςαν ρέςτα 50 καπ. Αφτα θα ίνε το ιπόλιπο απο τι διέρεςι τυ 200 δια 75.

Οριςμος. **Αν ο διερετέος δεν διερίτε ακριβος δια τυ διερέτι τότε, ι διαφορα μετακςι τυ διερετέυ κε τυ γινομένυ τυ διερέτι επι το πιλίκο, ονομάζετε ιπόλιπο.**

Σιμίοςι. 1. Το ιπόλιπο πρέπι πάντα να ίνε μικρότερο απο τον διερέτι.

2. Μπορύμε να πύμε, πος το ιπόλιπο ιςύτε με μιδενικο, αν ο διερετέος διερίτε ακριβος δια τυ διερέτι.

Ας κάνυμε τι δοκιμι τυ 1-υ προβλίματος: για τις 2 λάμπες πλιρόςανε 1 ρ. 50 κ. αν προςθέςυμε το ιπόλιπο 50 καπ., τότε θα βρύμε 2 ρύβ.

Ας γράπςυμε τι δοκιμι ςίντομα:

$$75 . 2 + 50 = 200 \text{ καπ.} = 2 \text{ ρύβλια.}$$

Εδο το 200 ίνε ο διερετέος, το 75 — ο διερέτις, το 2 — το πιλίκο, το 50 — ιπόλιπο. Απο όλες τις περιπτόςις τις διέρεςις με ιπόλιπο ςινάγυμε:

Ο διερετέος ιςύτε με το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίκο ςιν το ιπόλιπο.

Παράςταςι τυ κανόνα με γράματα $a = bq + c$, a — διερετέος, b — διερέτις, q — πιλίκο, c — ιπόλιπο.

Τον ίδιο κανόνα μερικες φορες διατιπόνυν αλιότικα:

Ο διερετέος πλιν τυ ιπολίπυ ιςύτε με τον διερέτι, επι το πιλίκο.

Παράςταςι τυ κανόνα με γράματα: $a - c = bq$, όπυ a ίνε διερετέος, b — διερέτις, q — πιλίκο κε c ιπόλιπο.

2. $\frac{135}{12}$ δίνι πιλίκο 11 κε ιπόλιπο 3, ίτε $(135 - 3) = 12 . 11$.

Πολι έφκολα μπορύμε να βρίςκυμε το πιλίκο κε το ιπόλιπο ςτιν περίπτοςι τις διέρεςις οπιυδίποτε αριθμυ με άλυ, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα.

3. Να βρεθι το πιλίκο κε το ιπόλιπο:

1) 87 536 : 1 000, 2) 127 531 : 10 000

Λ ί ς ι. 1) 87 536 = 87 . 1 000 + 536.

Βρίςκυμε πιλίκο 87 κε ιπόλιπο 536.

Το ίδιο αποτέλεςμα βρίςκυμε χορίζοντας με γραμι ίτε με απόςτροφο τις χιλιάδες απο τις μονάδες τον κατότερον ςιρον.

87 536 = 87’536

Στ’ αριςτερα βρίςκυμε το πιλίκο 87, ςτα δεκςια το ιπόλιπο 536.

2) Στο δέφτερο παράδιγμα διερύμε δια 10 000. Για να βρύμε το πιλίκο πρέπι να χορίςυμε απο το διερετέο τις δεκάδες τον χιλιάδον:

127 531 = 12’7531.

Το πιλίκο ίνε το 12 κε το ιπόλιπο το 7 531.

Για να βρίςκυμε το πιλίκο κε το ιπόλιπο κατα τι διέρεςι ενος αριθμυ με άλον, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα, πρέπι να χορίςυμε απ’ το δεκςιο μέρος τυ διερετέυ τόςα πςιφία, όςα μιδενικα έχι ο διερέτις ςτο τέλος-τυ. Ο αριθμος πυ χορίςαμε με τα πςιφία τυ, δίχνι το πιλίκο, κε τα ιδιέτερα πςιφία δίχνυν το ιπόλιπο.

§ 23. Ι αλαγι τυ ιπολίπυ.

Ας εκςετάςυμε τι ςιμβένι με το ιπόλιπο όταν αλάκςυμε το διερετέο κε διερέτι.

Το εργοςτάςιο έδοςε για τιν αγορα αφτοκινίτον 48 700 ρυβ. Κάθε αφτοκίνιτο πυ αγόραςε κόςτιςε 8 000 ρυβ. Πόςα αφτοκίνιτα αγόραςε κε πόςα χρίματα έμιναν;

Λ ί ς ι. Πρέπι να διερέςυμε τον 48 700 δια τυ 8 000· βρίςκυμε πιλίκο 6 κε ιπόλιπο 700.

Αλα για να απλυςτέπςυμε τιν πράκςι μπορύμε να διαγράπςυμε τον ίδιο αριθμο μιδενικον κε απο τον διερετέο κε απο τον διερέτι. Το πιλίκο δεν μεταβάλετε, αν λιγοςτέπςυμε 100 φορες, το διερετέο κε το διερέτι, κε θα έχυμε 487 : 80 το πιλίκο κςανα θα ίνε το 6, αλα ιπόλιπο θα μένι 7. Αφτο θα λιγοςτέπςι 100 φορες.

Απο τι λίςι τυ παραδίγματος τύτυ ςινάγυμε:

Οταν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε το διερετέο κε το διερέτι με ένα κε τον αφτον αριθμο, τότε κε τυ ιπόλιπο πολαπλαςιάζετε ίτε διερίτε με τον ίδιο αριθμο. Το πιλίκο απ’ αφτο δεν αλάζι.

§ 24. Διέρεςι κατα τιν οπία προκίπτι πολιπςίφιο πιλίκο.

Στιν περίπτοςι αφτι ι διέρεςι κςεχορίζετε ςε ιδιέτερες διερέςις, ςτις οπίες διερέτις θα ίνε ένας αριθμος κε ο αριθμος πυ προκίπτι θα ίνε μονοπςίφιο πιλίκο. Το ςιμίο τις διέρεςις θα ίνε: ⌊ (ορθι γονία).

1. Να διερεθι ο 21 828 δια τυ 642. Παράςταςι τις διέρεςις:

```
 21 828 | 642
-19 26  |-----
          34
  2 568
- 2 568
 ------
```

Θα δόςυμε ακόμα ένα παράδιγμα διέρεςις.

2. Να διερεθι 37 943 491 : 943.

Λ ί ς ι:

```
 37943491 | 943
-3772     |-----
 -----    | 40237
   223
   2234
  -1886
   -----
   3489
  -2829
   -----
   6601
  -6601
   -----
```

Στο παράδιγμα αφτο, γράφοντας ςτο πρότο ιπόλιπο 22 ένα πςιφίο τυ διερετέυ, βρίκαμε τον αριθμο 223, πυ δεν διερίτε δια τυ 943. Στις περιπτόςις αφτες πρέπι να βάζυμε μιδεν στο πιλίκο, το οπίο κε εχτελέςαμε, κε τότε μονάχα κατεβάςαμε ςτο ιπόλιπο το ακόλυθο πςιφίο τυ διερετέυ.

Για να διερέςυμε έναν αριθμο με άλον, χορίζυμε απ' τα αριςτερα, αρχίζοντας απ'το πρότο πςιφίο τυ διερετέυ, τόςα πςιφία, όςα διερύμενα δια τυ διερέτι θα δόςυν μονοπςίφιο πιλίκο. Στα δεκςια τυ πρότυ ιπόλιπυ κατεβάζυν το ακόλυθο πςιφίο τυ διερετέυ, κ' έτςι ςχιματίζυν δέφτερο διερετέο. Αν διερέςυμε αφτον τον δέφτερο διερετέο δια τυ διερέτι, τότε θα έχυμε το δέφτερο ζιτύμενο πςιφίο τυ πιλίκυ, κε το ιπολιπο θα ίνε δέφτερο ιπόλιπο. Ετςι, εκςακολυθυν να κάνυν το ίδιο κε με το ιπόλιπο αφτο, οςότυ να εκςαντλιθυν όλα τα πςιφία τυ διερετέυ. Το τελεφτέο ιπόλιπο, θα ίνε το ιπόλιπο τις διέρεςις.

V. Ι ΣΙΡΑ ΤΟΝ ΠΡΑΚΣΕΟΝ. ΠΑΡΕΝΘΕΣΙΣ.

§ 1. Ι ςιρα τον πράκςεον μιας βαθμίδας.

Τα μαθιματικα ςιμία δίχνυν, πιες πράκςις κε με πια ςιρα πρέπι να τις κάνυμε πάνο ςτυς διδομένυς αριθμυς. Ι γραφι με τα μαθιματικα ςιμία πρέπι να ίνε απλι, ακριβις κε οριςμένι. Προπάντον ίνε ςπυδέο, να μιν επιτρέπςι ι γραφι αφτι να εκςιγίςυμε όπος τίχι τι ςιρα τον πράκςεον.

1. Ι πράκςις μιας κε τις αφτις βαθμίδας εχτελύντε με τι ςιρα εκίνι με την οπία ίνε γραμένες.

1) 63 — 18 + 15 — 40 + 8 + 1 = 29, 2) 80 : 2 . 5 : 4 : 10 = 5

Ας βρύμε τα εκςαγόμενα αλάζοντας τι ςιρα τον πράκςεον:

1) 63 — 18 + 15 — 40 + 8 + 1 = 29
63 + 15 — 40 + 8 — 18 + 1 = 29
63 — 40 + 8 — 18 + 15 + 1 = 29
63 + 1 + 15 — 18 — 40 + 8 = 29
63 — 18 — 40 + 1 + 15 + 8 = 29

2) 80 : 2 . 5 : 4 : 10 = 5
80 : 2 . 5 : 10 : 4 = 5
80 : 2 : 10 . 5 : 4 = 5
80 : 10 : 2 . 5 : 4 = 5
80 : 10 . 5 : 2 : 4 = 5

Το εκςαγόμενο ς'όλες αφτες τις περιπτόςις μένι το ίδιο.

2. Ιπάρχυν, εντύτις, περιπτόςις, πυ κατα τιν εχτέλεςι τον πράκςεον τις ίδιας βαθμίδας θέλυν να αλάζυν τι ςιρα τον πράκςεον:

1) 72 — 45 — 13 = 14, αλα 2) 72 — (45 — 13) = 40.

Στο πρότο παράδιγμα πρότα αφερύςαν τον 45, κε έπιτα αφερύςαν το 13. Στο δέφτερο — πρότα απο τον 45 αφέρεςαν το 13, κε έπιτα το εκςαγόμενο αφέρεςαν απο το 72. Σ'αφτες τις περεπτόςις, όταν θέλυν να ιποδίκςυνε τιν ςιρα τον πράκςεον, εκςον απ'τα ςιμία μεταχιρίζοντε τις παρενθέςις.

Παρενθέςις ιπάρχυν τριον ιδον:

1) απλες (15 — 7) . 7, 2) ανκίλες [5 + 5 . (12 — 3)] . 2, 3) πικίλες {(8 + 7) . [(5 + 3) . 2 — 4]} . 5.

Οταν εχτελύμε πράκςις με παρενθέςις, πρέπι βαθμιδον να ανίκςυμε τις παρενθέςις δ.λ. να κάνυμε τις πράκςις, πυ ίνε μέςα ςτις παρενθέςις κε ςτι θέςι αφτον να βάλυμε το εκςαγόμενο.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν ανίγυμε τις παρενθέςις ίνε κατάλιλο ν' αρχίζυμε απο τις εςοτερικες παρενθεςις.

3. Γράπςτε κε βρέςτε το εκςαγομένο: απο το 43 να αφερεθι το άθριζμα 13 κε 8.

Δ ί ς ι. 43 — (13 + 8) = 43 — 21 = 22.

Εδο αν γράφαμε το πρόβλιμα χορις παρενθέςις θα παραμορφόνονταν το νόιμα τυ προβλίματος: θα βρίςκαμε 43 — 13 + 8 = 38.

Για να κάνυμε τις πράκςις τις ίδιας βαθμίδας ι χριςιμοπίιςι τον παρενθέςεον ίνε απαρέτιτι ς' εκίνες τις περιπτόςις, όταν προςθέτυν ίτε αφερυν τα εκςαγόμενα τον πράκςεον, πυ ιποδιχτίκανε, χορις να κάνυνε αφτες τις ίδιες πράκςις.

4. Γράπςτε κε βρέςτε:

1) Στο 15 να προςτεθι το άθριζμα τον αριθμον 7, 13, κε 8:
15 + (7 + 13 + 8) = 15 + 28 = 43

2) Απο το 40 να αφερεθι ι διαφορα τον αριθμον 19 κε 12.
40 — (19 — 12) = 40 — 7 = 33.

3) Στον 8 να προςτεθι ι διαφορα τον αριθμον 71 κε 62:

4*

$$8 + (71 - 62) = 8 + 9 = 17.$$

§ 2. I sira ton prákseon ton diafóron vathmidon.

O kanónas tis siras ton prákseon tis ídias vathmidas den efarmózete stis práksis ton diaforon vathmídon.

G'aftes tis práksis ischíi o akíluthos kanónas:

I práksis ton anóteron vathmídon gínonte protítera ap' tis práksis ton katóteron vathmídon.

1. Na vrethí: $72 - 8.3$. An tha kánume tis práksis me ti sira, ópos íne gramenes, tóte tha afereśume apo to 72 to 8 ke to evriskómeno tha to polaplasiásume epi to 3. Ala símfona me ton kanóna, pu ipodíchni ti sira tis ekteleśis ton prákseon s' ekínes tis periptósis, ótan echume práksis diaforon vathmidon, tis práksis ton anóteron vathmidon, kánume se próti sira. M' afto mporúme n' apofígume na gráfsume tis porenthésis kata ton polaplasiasmo ke ti diéresi.

Den grafun: $72 - (8.3)$, ala grafun: $72 - 8.3 = 48$.

Stis peripósis, pu mpori na simvi parekslíisi sti sira ton prákseon ton diafóron vathmídon, chrisimopiúne tis porenthésis. Ke edo, ópos ke otan kánun tis práksis tis idios vathmídas, stis porenthésis eskliun ta apotelézmata ekíon ton prákseon, pu échun ipodichti, óchi ómos ekteleźménon teliotika.

2. Ipodíkste ke vréśte: to áthrizma ton ginoménon tu arithmu 5 epi 6 ke epi 3 dieróumeno dia tis diaforas afton ton ginoménon:

$$(5 . 6 + 5 . 3) : (5 . 6 - 5 . 3) = (30 + 15) : (30 - 15) = 45 : 15 = 3$$

I grafi choris parenthésis tha édine alo exagómeno:

$$5 . 6 + 5 . 3 : 5 . 6 - 5 . 3 = 30 + 18 - 15 = 48 - 15 = 33.$$

S i m í o s i. To simío tis diéresis mpori na antikatastathi me ti grami tu klázmatos. I grami afti antikatasta epísis ke tis parenthésis.

3. Na dierethi: $(15 + 25) : 5$. Afto mpori na grafi ke alióтika.

$$(15 + 25) : 5 = \frac{15 + 25}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

ΔΙΕΡΕΤΟΤΙΤΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

§ 1. Dieretótita ton arithmon.

Ean énas akéreos arithmos dierite dia alu choris ipólipo, tóte o prótos arithmos onomázete polaplásio tu défteru arithmu, o défteros arithmos onomázete dierétis tu prótu arithmu.

O arithmos 1424 íne polaplásio tu arithmu 4. O arithmos 4 íne dierétis tu arithmu 1424.

P a r a t í r i s i. Otan parakáto tha púme, pos énas arithmos dierite me opiodípote álon arithmo, tote pánta tha échume ipópsi télia diéresi, choris ipólipo.

As gráfsume mia sira akéreon arithmon archízontas apo to midenikó:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12... Kśérume pos afti i sira ton arithmon, onomázete f i s i k i s i r a arithmon.

Oli i arithmi tis fisikis siras dierúnte me tin monáda. Dierúnte akóma ke me ton eaftó-tus.

Olus tus arithmus tis fisikis siras mporúme na dierésume akrivos dia tu eaftú-tus ke dia tis monádes.

Anámesa stus arithmus tis fisikis siras ipárchun tétii arithmi i opíi ektos apo ti monáda ke ton eaftótus, échun ke merikus álus dierétes. P. ch. o arithmos 15 dierite dia tu 1, dia tu 15, dia tu 3, ke dia tu 5·
$15 : 1 = 15$· $15 : 15 = 1$· $15 : 3 = 5$ $15 : 5 = 3$.

§ 2 I idiótita tu athrízmatos, stin opía stirízonte ta simperázmata ton gnorizmáton tis dieretótitas.

I trópi, me tus opíus mporúme na diakrínume, choris na kánume ti diéresi, an énas arithmos íne dierétis tu álu, onomázonte gnorízmata tis dieretótitas.

To simpérazma ton gnorizmáton tis dieretótitas stirízete stis akóluthes idiótites tu athroízmatos.

I. Ean káthe prosthetéos dierite akrivos dia opiudípote arithmu, tóte ki ólo to áthrizma dierite dia tu ídiu arithmu.

II. Ean óli i prosthetéi, ektos enos, dierúnte dia opiudípote arithmu, ke aftos o énas prosthetéos den dierite dia tu ídiu arithmu, tóte ke ólo to áthrizma den dierite dia tu ídiu arithmu.

1. $20 + 30 + 700 + 50 = 800$. Stin períptosi afti óli i prosthetéi dierúnte dia tu 10, ke to áthrizma dierite dia tu 10.

2. $20 + 30 + 700 + 49 = 799$. Stin períptosi afti óli i prosthetéi, ektos enos, — to 49 — dierúnte dia tu 10, ke to áthrizma den dierite dia tu 10.

§ 3. Ta gnorízmata tis dieretótitas dia tu 10, dia tu 100, dia tu 1000.

Ap' tus kanónes tis diéresis dia ton arithmon 10, 100 ke 1000, pu teliónun se midenika, févete pos o arithmos, pu dierite dia 10 choris ipólipo, prépi na échi sto télos éna tuláchisto midenikó, epidi s' afti tin períptosi aftos tha apotelíte apo olóklires dekádes.

I arithmi 10, 50, 90, 100, 400, 1000, 3500, dierúnte dia 10.

I arithmi 7, 23, 108, 51 916 den dierúnte dia 10.

Dia tu 10 dierúnte ekíni i arithmi, pu teliónun se midenikó.

Ι αριθμι 200, 800, 15 000 διερύντε δια 100, ενο ι αριθμι 270, 420, 1730 δεν διερύντε δια τυ 100.

Δια το 100 διερύντε εκίνι ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε διο μιδενικα. Παρόμια μ' αφτο:

Δια τυ 1000 διερύντε εκίνι ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε τρία μιδενικα.

§ 4. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια 2 κε δια 5.

Οριζμος. **Ολι ι αριθμι, πυ ίνε πολαπλάςιι τυ 2 ονομάζυντε άρτιι αριθμι ίτε ζιγι. Ολι δε ι άλι αριθμι ονομάζοντε περιτι.**

Ο δέκα διερίτε κε δια τυ 2 κε δια τυ 5.

$$10 : 2 = 5, \quad 10 : 5 = 2.$$

Οστε κάθε αριθμος, πυ αποτελίτε απο δεκάδες, πρέπι να διερεθι δια 2 κε δια 5. Κε επιδι ι αριθμι πυ αποτελύντε απο δεκάδες έχυν στο τέλος μιδενικο, ι παρυςία τυ μιδενικυ στο τέλος τυ αριθμυ, δίχνι, πως ο αριθμος διερίτε δια 2 κε δια 5.

1) $470 : 2 = 235, \quad 5800 : 5 = 1160.$

Αν ο αριθμος δεν τελιόνι ςε μιδενικο, τότε για να καταλάβυν αν διερίτε ο αριθμος δια 2 ίτε δια 5, τον χορίζυν ςε διο προςθετέυς, απο τυς οπίυς ο πρότος προςθετέος πρέπι να αποτελίτε απο δεκάδες διλ. να τελιόνι ςε μιδενικο κε να διερίτε δια 2 κε δια 5.

2) $385 : 5 = (380 + 5) : 5 = 380 : 5 + 5 : 5$, το 385 διερίτε δια 5.
3) $748 : 2 = (740 + 8) : 2 = 740 : 2 + 8 : 2$, το 748 διερίτε δια 2.
4) $928 : 5 = (920 + 8) : 5 = 920 : 5 + 8 : 5$, το 928 δεν διερίτε δια 5, διότι ο δέφτερος προςθετέος 8 δεν διερίτε δια 5.
5) $67 : 2 = (60 + 7) : 2 = 60 : 2 + 7 : 2$, το 67 δεν διερίτε δια 2.

Ι λίςι εξαρτάτε απο το τελεφτέο πςιφίο τυ αριθμυ. Ετςι βρίςκυμε τα γνορίζματα τις διερετότιτας τυ αριθμυ δια 2 κε δια 5:

Δια 2 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε μιδενικο ίτε ςε άρτιο πςιφίο (2, 4, 6, 8).

Δια 5 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε μιδενικο ίτε ςε 5.

§ 5. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 4 κε δια τυ 25.

Ο 100 διερίτε δια 4 κε δια 25. Οστε, καθένας αριθμος, πυ αποτελίτε απο εκατοντάδες, χορις να έχι δεκάδες κε μονάδες κε γι' αφτο τελιόνι ςε διο μιδενικα, πρέπι να διερίτε δια 4 κε δια 25.

1) $100 : 4 = 25, \quad 100 : 25 = 4, \quad 6200 : 4 = 1550, \quad 1700 : 25 = 68.$
2) $3868 : 4 = (3800 + 68) : 4 = 3800 : 4 + 68 : 4$. Το 3868 διερίτε δια τυ 4.

Χορίζοντας τον αριθμο 3868, όπος κάναμε στιν πρειγύμενι παράγραφο, μπορύμε να τον παραςτένυμε με διο προςθετέυς, απο τυς οπίυς ο ένας θα τελιόνι ςε διο μιδενικα κε γι' αφτο θα διερίτε δια 4 κε δια 25. Απ' τιν τέλια διέρεςι τυ δέφτερυ προςθετέυ δια 4 κε δια 25, εξαρτάτε κε ι διερετότιτα όλυ τυ αριθμυ δια 4 κε 25.

3) $875 : 25 = (800 + 75) : 25 = 800 : 25 + 75 : 25$ το 875 διερίτε δια τυ 25.

4) $917 : 4 = (900 + 17) : 4 = 900 : 4 + 17 : 4$, το 917 δεν διερίτε δια 4, διότι ο δέφτερος προςθετέος 17 δεν διερίτε δια τυ 4.
5) $1343 : 25 = (1300 + 43) : 25 = 1300 : 25 + 43 : 25$, το 1343 δεν διερίτε δια τυ 25:

Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 4 κε δια τυ 25.

Δια τυ 4 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε διο μιδενικα, καθος κε ι αριθμι, τον οπίον τα διο τελεφτέα πςιφία αποτελυν αριθμο διερετο δια τυ 4.

Δια τυ 25 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε διο μιδενικα, καθος κε ι αριθμι, τον οπίον τα διο τελεφτέα πςιφία αποτελυν αριθμο διερετο δια τυ 25. Διλ. ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε 25, 50 ίτε 75.

§ 6. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 8.

Καθένας αριθμος, πυ τελιόνι ςε τρία μιδενικα αποτελίτε απο χ λ ά δ ε ς.

Μα το $1000 = 8 \times 125$ διερίτε δια το 8 κε δια τυ 125, γι' αφτο κε το άθριζμα κάμποςον χιλιάδον ίνε διερετο δια τυ 8 κε δια τυ 125. Π.χ. $25\,000 : 8 = 3\,125$.

1) Μπορι να διερεθι το 45 328 δια τυ 8;

Αν αναλίςυμε τον αριθμο αφτο ςε άθριζμα τον αριθμον: $45\,000 + 328$, το 45 000 διερίτε δια τυ 8, το $328 : 8 = 41$, γι' αφτο κε το 45 328 διερίτε δια τυ 8.

2) $16\,242 : 8$, $16\,242 = 16\,000 + 242$. Αλα ο δέφτερος προςθετέος 242 δεν διερίτε δια 8 γι' αφτο κε το 16242 δεν διερίτε δια 8.

Δια τυ 8 διερύντε ι αριθμι, πυ τελιόνυν ςε τρία μιδενικα, καθος κε ι αριθμι τον οπίον, τα τρία τελεφτέα πςιφία αποτελυν αριθμό διερετο δια τυ 8.

§ 7. Τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια τυ 9 κε τυ 3.

1. Ι Αριθμι 9, 99, 999, κ.υ.κ., πυ σχιματίζοντε απο τον 9, διερύντε ακριβος δια τυ 9 κε τυ 3.

Τυς αριθμυς: 10, 100, 1000, 10 000, μπορύμε να τυς χορίςυμε ςε διο προςθετέυς κε έτςι θα έχυμε τον ακόλυθο πίνακα:

$$\begin{aligned} 10 &= 9+1 \\ 100 &= 99+1 \\ 1\,000 &= 999+1 \\ 10\,000 &= 9\,999+1 \end{aligned}$$

Ο πίνακας αφτος δίχνι, πος ο αριθμος, πυ παραστένι τι μονάδα με μιδενικα στο τέλος, **διερύμενος δια τυ 9 δίνι ιπόλιπο 1.**

2. Ας μάθυμε αν το 4 332 ίνε διερετο δια τυ 9.

Αναλίοντας τον αριθμο 4 332 στις ιδιέτερες μονάδες τον διαφόρον σιρον θα έχυμε:

$$\begin{aligned} 4\,332 = {} & 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + \\ & + 10 + 10 + 10 + \\ & + 2 \end{aligned}$$

Ας παραστένυμε κάθε μια χιλιάδα με $999 + 1$, κάθε μια εκατοντάδα $99 + 1$, κάθε δεκάδα $9 + 1$ κε τότε θα έχυμε:

$$\begin{aligned} 4\,332 = {} & 999 + 999 + 999 + 999 + 4 + \\ & + 99 + 99 + 99 + 3 + \\ & + 9 + 9 + 9 + 3 + \\ & + 2 \end{aligned}$$

Ι προσθετέι 999, 99, 9 διερύντε δια τυ 9 κε δια τυ 3. Οστε ι διερετότιτα τυ αριθμυ τύτυ δια τυ 9 κε δια τυ 3 εξαρτάτε, απο το αν διερίτε δια τυ 9 κε δια τυ 3 ο αριθμος, πυ παραστένι το άθριζμα τον αριθμον τον μονάδον όλον τον σιρον: $4 + 3 + 3 + 2 = 12$. Αφτος ο αριθμος 12 ίνε διερετέος δια τυ 3, γι' αφτο κε όλος ο αριθμος ίνε διερετος δια τυ 3. Ο αριθμος 12 δια τυ 9 δεν διερίτε, γι' αφτο κε ο 4 332 δεν ίνε διερετος δια τυ 9.

3. Να βρεθι αν το 3 510 διερίτε δια τυ 9 κε τυ 3.

Ο αριθμος $3 + 5 + 1 = 9$ ίνε διερετος δια τυ 9 κε δια τυ 3, γι' αφτο κε το 3 510 ίνε διερετο δια τυ 9 κε δια τυ 3.

Δια τυ 3 διερύντε εκίνι ι αριθμι, τον οπίον το άθριζμα τον ψιφίον διερίτε δια τυ 3.

Δια τυ 9 διερύντε εκίνι ι αριθμι, τον οπίον το άθριζμα τον ψιφίον διερίτε δια τυ 9.

4. Να βρεθι αν διερύντε δια 9 κε δια 3 ι αριθμι: 1) 14 382 2) 2 760 3) 1 345.

1) 14 382 — το άθριζμα τον ψιφίον-τυ ίνε 18. Οστε ο αριθμος 14 382 διερίτε δια 3 κε δια 9.

2) 2 760 — το άθριζμα τον ψιφίον-τυ ίνε 15. Οστε ο αριθμος 2 760 δεν διερίτε δια τυ 9, διερίτε όμος δια τυ 3.

3) 1 345 — το άθριζμα τον ψιφίον-τυ ίνε 13. Οστε ο αριθμος 1 345 δεν διερίτε ύτε δια 3 ύτε κε δια τυ 9.

Οταν καθορίζυμε τιν διερετότιτα δια τυ 3, μπορύμε τα ψιφία, πυ διερύντε δια τρία να τα παραλίπυμε τον κερο, πυ τα προσθέτυμε κε ακόμα να παραλίπυμε εκίνα τα αθροίζματα, πυ διερύντε δια 3.

Οταν καθορίζυμε τι διερετότιτα δια τυ 9 απορίπτυμε τυς αριθμυς κε τα αθροίζματα, πυ διερύντε δια τυ 9.

5 Ο αριθμος 865 417 ίνε άραγε διερετος δια τυ 3;

Βρίσκυμε το άθριζμα: $8 + 6 + 5 + 4 + 1 + 7$. Κατα τιν πρόσθεσι απορίπτυμε το 6 γιατι ίνε γνοστο πος διερίτε δια 3, κάθος κε τα αθρίζματα $8 + 1$, κε $4 + 5$. Μένι μόνο το 7. Το 7 δεν διερίτε δια 3, όστε ο αριθμος 865 417 δεν διερίτε δια τυ 3.

6. Να βρεθι αν το 633 729 135 ίνε αριθμος διερετος δια τυ 9. Βρίσκυμε τα άθριζμα $6 + 3 + 7 + 2 + 9 + 1 + 3 + 5$. Κατα τιν πρόσθεσι παραλίπυμε το 9 κε τα αθροίζματα $6 + 3$ κε $7 + 2$. Μένι $1 + 3 + 5 = 9$. Οστε ο αριθμος διερίτε δια τυ 9.

§ 8. Αριθμι πρότι κε σίνθετι.

Τυς αριθμυς τις φισικις σιρας διερύμε σε διο ομάδες: 1) π ρ ό τ ι ίτε α π λ ι α ρ ι θ μ ι κε 2) σ ί ν θ ε τ ι α ρ ι θ μ ι.

Ι προτι αριθμι ίνε διερετι μονάχα δια τις μονάδες κε τυ εαφτύ-τυς.

Ι σίνθετι αριθμι ίνε διερετι, όχι μονάχα δια τις μονάδας κε τυ εαφτύ-τυς, αλα κε δια κάπιυ αλυ αριθμυ.

Τα γνορίζματα τις διερετότιτας μας επιτρέπυν να ξεχορίζυμε τυς πρότυς αριθμυς, απο τυς αριθμυς τις φισικις σιρας.

Ας γράψυμε πίνακα με αριθμυς φισικις σιρας απο το 1 ος το 100.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 13, 14, 15, 16, 17, 18.....

95, 96, 97, 98, 99, 100.

Ας εξαλίψυμε όλυς τυς άρτιυς αριθμυς, αρχίζοντας απ' το 4. Ετσι θα εξαλιφτυν ι αριθμι, πυ βρίσκοντε ίστερα απο έναν αριθμο.

Ας σβίσυμε τυς αριθμυς πυ διερύντε δια 3, εκτος απο τον ίδιο αριθμο τον 3. Εδο εμις σβίνυμε κάθε τρίτο αριθμο απο τι σιρα τον φισικον αριθμον. Ετσι βαθμιδον σβίνυμε όλυς τυς σίνθετυς αριθμυς, πυ ίνε διερετι δια τυ 5, 7, 11 κε τον άλον πρότον αριθμον, πυ έμιναν στον πίνακα άσβεστι.

Ιστερα απο όλες τις διερέσις ι αριθμι, πυ έμιναν πίσο ίνε εκίνι, πυ σχιματίζυν τον πίνακα τον πρότον αριθμον. Μένυν πίσο μονάχα ι ακόλυθι αριθμι:

1, 2, 3, 5. 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Τον πίνακα τον πρότον αριθμον μπορύμε να ςινεχίζυμε όςο θέλυμε.

§ 9. Ανάλιςι τον αριθμον ςε γινόμενο πρότον παραγόντον.

Καθένα ςίνθετο αριθμο μπορύμε να τον παραςτένυμε ος γινόμενο άλον αριθμον, ìτε όπος λέμε, να τον αναλίςυμε ςε γινόμενο παραγόντον.

1. Ας αναλίςυμε τον αριθμο 36 ςε παράγοντες.

Λίςι $36 = 2 . 18 = 3 . 12 = 4 . 9 = 6 . 6 = 2 . 2 . 9 = 4 . 3 . 3 = 2 . 2 . 3 . 3.$

Ι ανάλιςι τυ αριθμυ ςε παράγοντες μπορι να γίνι με διάφορυς τρόπυς. Ι τελεφτέα ανάλιςι ($36 = 2 . 2 . 3 . 3$) διακρίνετε απο τις άλες κατα τύτο, ότι όλι ι παράγοντες αφτις ίνε πρότι αριθμι.

Καθένα αριθμο μπορύμε να παραςτένυμε ος γινόμενο πρότον αριθμον μονάχα με ένα τρόπο.

2. Ας αναλίςυμε ςε γινόμενο πρότον παραγόντον τυς αριθμυς 30 κε 42.

Λίςι. 1) $30 = 2 . 3 . 5$, 2) $42 = 2 . 3 . 7$.

Σιμίοςι. Σε κάθε γινόμενο ίνε δινατο να μεταθέςυμε τυς παράγοντες. Οταν ι παράγοντες ενος αριθμυ μένυν ι ίδιι κε αλάζυν μονο θέςι τότε θεορύμε ίδιες κε τις αναλίςις τυ αριθμυ αφτυ.

3. Ας αναλίςυμε τον αριθμο 30 ςτυς πρότυς παράγοντές τυ.

Λίςι. $30 = 2 . 5 . 3 = 5 . 3 . 2 = 2 . 3 . 5.$

Ολες αφτες ίνε διάφορες γραφτες παραςτάςις τις ίδιας ανάλιςις. Ο αριθμος 30 έχι παράγοντες: 2, 3, 5.

Σίμφονα με τυς κανόνες τις διέρεςις τυ γινομένυ μπορύμε να διερέςυμε τον αριθμο 30 κε δια 2, κε δια 3 κε δια 5. Τυς παράγοντες 2, 3, 5, μπορύμε να τυς ονομάςυμε διερέτες τυ αριθμυ 30. Μερικες φορες λένε „να αναλιθι ο αριθμος ςτυς πρότυς διερέτες“ αντις να „αναλιθι ο αριθμος ςτυς πρότυς παράγοντες“.

4. Κατα τιν ανάλιςι τυ αριθμυ ςτυς πρότυς παράγοντες, απο μνίμις, πρότι φορα αναλίυνε τον αριθμο ςε κίνυς τυς παράγοντες, πυ λογαριάζοντε κατάλλιλι, κε ίςτερα κάθε παράγοντα αναλιυν ςτυς πρότυς αριθμυς. Π. χ: $90 = 9 . 10 = 3 . 3 . 2 . 5.$

5. Ας αναλίςομε τον αριθμο 546 ςτυς πρότυς τυ παράγοντες.

Τι διάταξι τις πράξις κάνυν έτςι:

546	2	
273	3	$546 = 2 . 3 . 7 . 13.$
91	7	
13	13	
1		

6. Ας αναλίςομε ςτυς πρότυς παράγοντες τυς αριθμυς 1 764, 5 600

1 764	2	
882	2	
441	3	
147	3	$1\,764 = 2^2 . 3^2 . 7^2.$
49	7	
7	7	
1		

5 600	100	$= 10 . 10 = 2^2 . 5^2.$
56	2	
28	2	
14	2	$5\,600 = 2^2 . 5^2 . 2^3 . 7 = 2^5 . 5^2 . 7.$
7	7	
1		

Οταν αναλίομε ςτυς πρότυς παράγοντες μεγάλυς αριθμυς, ακολυθύμε οριςμένι ςιρα ςτο γράψιμο:

1. Πέρνυμε τυς παράγοντες απο τον πίνακα τον απλον αριθμον, εφαρμόζοντας τα γνορίςματα τις διερετότιτας.
2. Γράφυμε τυς παράγοντες ςτιν αφξιςιμένι ςιρά τυς.
3. Χριςιμοπιύμε κατα τι γραφι τον εκθέτι τυ βαθμυ.
4. Αρχίζυμε τιν ανάλιςι τον αριθμον, πυ τελιόνυν ςε μιδενικα απο το 10, 100 κ.τ.λ, αφτο μας δίνι παράγοντες τόςες δυάδες κε πεντάδες, όςα έχυμε μιδενικα ςτο τέλος τυ αριθμυ.

§ 10. Μέγιςτος κινος διερέτις.

1. Κινος διερέτις καμπόςον αριθμον ονομάζετε ο αριθμος, με τον οπιον διερύντε ακριβος όλι ι δεδομένι αριθμι. Διάφορι άριθμι μπορυν να έχυν κινυς διερέτες, μπορυν όμος κε να μι έχυν αφτυς. Τι μονάδα ος διερέτι δεν τιν πέρνυν ιπόψι, επιδι καθένας αριθμος διερίτε δια τις μονάδας χορις να αφίςι ιπόλιπο.

Ι αριθμι 6 κε 10 έχυν κινο διερέτι τον αριθμο 2· ι αριθμι 15 κε 24 έχυν κινο διερέτι τον αριθμο 3· ι αριθμι 180 κε 300 έχυν κινο διερέτι το 60 κε κάθε αριθμο δια τυ οπίυ διερίτε το 60.

Ι αριθμι 5 κε 7· 25 κε 42 δεν έχυν κινο διερέτι.

Οριςμος. **Ι αριθμι, πυ δεν έχυν κινυς διερέτες, εκτος τις μονάδας, ονομαζοντε προτι προς αλιλυς (αμβεα πρότι).**

Τετιι ίνε ι αριθμι 5 κε 7, 25 κε 42 αν κε ο ένας ίτε μάλιςτα κε ι διο απο το ζεβγάρι τον αριθμον, ίνε ςίνθετι.

2. Ο αριθμος 20 θα ίνε κινος διερέτις τον αριθμον 1000, 2000, 2500, 3000. Αλα εκτος τον διερέτι 20, ι ίδιι αριθμι έχυν κε άλυς κινυς διερετες: 50, 100, 500.

Ο μέγιςτος απ' αφτυς τυς διερέτες ίνε το 500.

Οριςμος. **Μέγιςτος κινος διερέτις κάμποςον αριθμον ονομάζετε ο μεγαλίτερος αριθμος, δια τυ οπίυ διερύντε όλι ι δεδομένι αριθμι.**

3. Αν θα πάρυμε τυς αριθμυς 8 κε 15 τότε θα δύμε, πος αφτι ι αριθμι έχυν τυς διερέτες-τυς: ο αριθμος 8 έχι διερέτες: 2, 4, 8. Ο αριθμος 15 έχι διερέτες: 3, 5, 15.

Εχτος απ' αφτο όπος κσέρυμε ο κάθε αριθμος διερίτε δια τις μονάδας. Ι αριθμι 8 κε 15 δεν έχυν κ.θόλυ κινυς διερέτες, εχτος απο τι μονάδα. Ι μονάδα θα ίνε γι' αφτυς κε ο μέγιστος κινος διερέτις.

Διο αμιβέα πρότι αριθμι έχυν κινο διερέτι τι μονάδα.

4. 1) Να βρεθι ο μέγιστος κινος διερέτις τον αριθμον 80, 40, 96.

Λ ί ς ι: Αναλίυμε αφτυς τυς αριθμυς στυς πρότυς-τυς παράγοντες ίτε διερέτες, σινκρίνυμε τιν ανάλισι κε διαλέγυμε τυς κινυς παράγοντες.

$$80 = 2.2.2.2.5 = 2^4 . 5 = 2^3 . 2 . 5 = 2^3 . 10,$$
$$40 = 2.2.2.5 = 2^3 . 5 = 2^3 . 5 = 2^3 . 5$$
$$96 = 2.2.2.2.2.3 = 2^3 . 2^2 . 3 = 2^3 . 12.$$

Το γινόμενο τον ιπογραμιζμένον διερετον, πυ ίνε κινι για όλυς δίνι τον μέγιστο κινο διερέτι.

Ι αριθμι 80, 40, 96 έχυν μέγιστο κινο διερέτι τον $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$

2. Να βρεθι ο μέγιστος κινος διερέτις τον αριθμον 1800, 500 κε 700.

Λ ί ς ι. Να βρύμε τον κινο διερέτι τον αριθμον αφτον ίνε έφκολο, αφτος ίνε 100, κε χορις να τον αναλίσυμε στυς πρότυς διερέτες θα έχυμε:

$$1800 = 2 . 3 . 3 . \underline{100},$$
$$500 = 5 . \underline{100},$$
$$700 = 7 . \underline{100}.$$

Ο μέγιστος κινος διερέτις τον αριθμον 1800, 500 κε 700 θα ίνε ο 100.

5. Ας πάρυμε τυς αριθμυς 75 κε 25 ι αριθμι αφτι έχυν κινυς διερέτες το 1, 5, 25.

Ο μέγιστος κινος διερέτις θα ίνε ο αριθμος 25. Ετςι λιπον, ο μικρότερος απο τυς διο αφτυς αριθμυς ίνε μέγιστος διερέτις τον διο αριθμον.

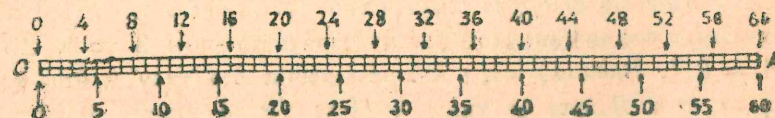
Ι. Εαν ο μεγαλίτερος απο τυς διο δεδομένυς αριθμυς διερίτε δια τυ μικροτέρυ, τότε αφτος ο μικρότερος ίνε ο μέγιστος κινος διερέτις τον διο δεδομένον αριθμον.

ΙΙ. Αν ο μικρότερος αριθμος δεν θα ίνε ο μέγιστος κινος διερέτις τον διο δεδομένον αριθμον, τότε αναλίοντας τυς αριθμυς στυς πρότυς παράγοντές-τυς κε διαλέγοντας ς' όλυς τυς δεδομένυς αριθμυς, όλυς τυς κινυς παράγοντες, βρίςκυμε τον μέγιστο κινο διερέτι ςαν γινόμενο αφτον τον παραγόντον.

§ 11. Ελάχιστο πολαπλασιο.

Οριζμος. **1. Ο αριθμος ο οπίος διερίτε ακριβος δια τυ δοθεντος αριθμυ, ονομαζετε πολαπλάσιο αφτυ τυ αριθμυ.**

2. Στο σχίμα 2 παριστάνετε εφθία. Πάνο στιν εφθία μπορύμε να παραστίσυμε αριθμυς. Γι' αφτο πρέπι να διαλέγυμε τιν μονάδα τις κλίμακας. Ι μονάδα πάνο στιν εφθία αφτι αποδίδετε με 2 μμ μάκρος. Κσεχορίζοντας απ'το σιμίο 0 τιν μονάδα τις κλιμακας σιμιονυμε στο τέλος τις γραμις, πυ έχι μάκρος 2 μμ με τον αριθμο 1. Το τέλος τις γραμις μακρυς 4 μμ σιμιόνυμε με τον αριθμο 2. Ετςι εξακολυθύμε να σιμιόνυμε κε θα έχυμε τα σιμία με τυς αριθμυς 3, 4, 5, 6 . . . Μπορύμε πάνο στιν εφθία να σιμιοσυμε όλυς εκινυς τυς αριθμυς, πυ μας χριαζοντε. Τέτια εφθία ονομάζετε: **αριθμιτικος άκσονας.**



Ιχ. 2.

Μεταξι τον αριθμον πάνο στον αριθμιτικο άκσονα ιπάρχυν αριθμι πολαπλάσια τυ 5. Αφτι ίνε: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 . . . 60 . . .

Στον ίδιο άκσονα ιπάρχυν ακόμα κε άλι αριθμι πολαπλάσια τυ 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 . . . 60 . . .

Τόρα ας διαλέκσυμε απο τις διο αφτες σιρες εκίνυς τυς αριθμυς, πυ να ίνε σινάμα πολαπλασιο τυ 5 κε τυ 4. Τέτιι αριθμι ίνε ο 20, 40, 60.

Βρίσκυμε τον ελάχιστο απο αφτυς. Αφτος θα ίνε ο αριθμος 20. Αφτος, λιπον, ο 20 ίνε το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον 4 κε 5.

Οριζμος. **Ο ελάχιστος απ' όλυς τυς αριθμυς, ο οπίος διερίτε χορις ιπόλιπο με όλυς τυς δομενυς αριθμυς, ονομαζετε ελάχιστο πολαπλασιο τον αριθμον.**

Το ελάχιστο πολαπλασιο μπορυμε να το βρύμε κε ετςι:

3. Βρισκυμε το ελάχιστο πολαπλάσιο τυ 4 κε 6.

Αφτο πρεπι να διερεθι δια 4 κε 6. Ο αριθμος 4 έχι παράγοντες 2.2. Ο αριθμος 6 εχι παραγοντες 2 κε 3. Οστε κε ο αριθμος, το πολαπλάσιο τυ 4 κε 6, πρέπι να περιέχι παράγοντες διο φορες τον 2 κε μια φορα τον 3. Το ελάχιστο πολαπλασιο, οπος φένετε, θα περιέχι μονάχα τυς παράγοντες 2.2.3, πυ ισοδινομι με 12.

§ 12. Τρις περιπτόςις τις έβρεςις τυ ελάχιςτυ πολαπλάςιυ.

Μπορύμε να ςιναντίςυμε τρις περιπτόςις τις έβρεςις τυ ελάχιςτυ πολαπλάςιυ κάμποςον αριθμον.

I. Ο ένας απο τυς αριθμυς διερίτε δι' όλον τον άλον.

1. Πέρνυμε τυς αριθμυς 6, 5, 30. Να βρεθι το ελάχιςτο πολαπλάςιο.

Λ ί ς ι. Το ελάχιςτο πολαπλάςιό-τυς ίνε ο 30, διότι ο 30 διερίτε δια 6, δια 5 κε δια 30.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Οταν θέλυμε να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάςιο, πάντοτε πρέπι να δοκιμάςυμε, αν ο μεγαλίτερος απο τυς δεδομένυς αριθμυς διερίτε δι' όλον τον άλον. Εαν ο μεγαλίτερος αριθμος διερίτε δι' όλον τον άλον, τότε αφτος θα ίνε το ελάχιςτο πολαπλάςιο όλον τον δεδομένον αριθμον.

II. Ολι ι δεδομένι αριθμι δεν έχυν κινυς παράγοντες.

2. Το ελάχιςτο πολαπλαςιο τον αριθμον 2,3 κε 5 ίςυτε: 2.3 5=30.

3. Να βρεθι το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον αριθμον 3, 25, 14.

Αναλίυμε, τυς αριθμυς ςτυς πρότυς παράγοντές-τυς: 3 = 3, 25 = 5.5, 14 = 2.7. Βλέπυμε πος ι δεδομένι αριθμι δεν εχυν πρότυς κινυς διερέτες, αν κε αναλίυντε ςε απλυς διερέτες (παράγοντες). Φένετε λιπον, πος το ελάχιςτο πολαπλάςιό-τυς θα ίνε τέτιος αριθμος, ο οπίος διερίτε δια όλον τον πρότον παραγόντον αφτον τον αριθμον. Τέτιος αριθμος, ίνε το γινόμενο όλον τον δεδομένον αριθμον:

$$3 . 25 . 14 = 1\,050.$$

III. Γενικι περίπτοςι. 4. Να βρεθι το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον αριθμον 40, 90, 75.

Λ ί ς ι. Αναλίυμε τυς αριθμυς αφτυς ςτυς πρότυς παράγοντές-τυς:

$$40 = 2 . 2 . 2 . 5 = 2^3 . 5,\quad 90 = 2 . 3 . 3 . 5 = 2 . 3^2 . 5,$$
$$75 = 3 . 5 . 5 = 3 . 5^2.$$

Για να βρίςκυμε τόρα το ελάχιςτο πολαπλάςιο, γράφυμε όλυς τυς παράγοντες τυ ενος αριθμυ (καλίτερα τυ μεγαλίτερυ) 2 . 3 . 3 . 5, έπιτα ςιμπλιρόνυμε αφτυς γράφοντας τυς παράγοντες τυ δέφτερυ αριθμυ (40) ι οπίι δεν ίνε ςτον πρότο δ.λ. 2 . 2 κε τελεφτέα ςτο γινόμενο αφτο γράφυμε τυς παράγοντες τυ τρίτυ αριθμυ (75), ι οπίι δεν ιπάρχυν ςτο γινόμενο τύτο, διλ. 5.

Το γινόμενο $2 . 3 . 3 . 5 . 2 . 2 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5^2 = 1800$ ίνε το πολαπλάςιο τον τριον αριθμον, γιατι αφτο περιέχι όλυς τυς παράγοντες (διερέτες) όλον τον δεδομένον αριθμον. Ο 1800 ίνε το ελάχιςτο πολαπλάςιο, διότι, εαν παραλίπςυμε έςτο κε έναν παράγοντα, τότε το ευριςκόμενο δεν θα ίνε πολαπλάςιο, κε δεν θα διερεθι έςτο κε με έναν απο τυς δεδομένυς αριθμυς.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Το ελάχιςτο πολαπλάςιο δίο ίτε περιςότερον αριθμον πρέπι να περιέχι όλυς τυς παράγοντες (διερέτες) αφτον τον αριθμον ςτον ανότερο βαθμο.

Για να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάςιο ςτιν τελεφτέα περίπτοςι δεν ίνε ανάνκι κάθε φορα να πολαπλαςιάςυμε όλυς τυς παράγοντες, πυ ίβραμε. Αρκι μονάχα να πάρυμε τον μεγαλίτερο απο τυς αριθμυς τυ προβλίματος τύτυ κε να τον ςιμπλιρόςυμε με τυς παράγοντες, πυ περιέχοντε ς' αφτον τον αριθμο.

5. Να βρεθι το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον αριθμον 360,600,720.

Λ ί ς ι $360 = 2^3 . 3^2 . 5,\quad 600 = 2^3 . 3 . 5^2,\quad 720 = 2^4 . 3^2 . 5.$ Το ελάχιςτο πολαπλάςιο βγένι: $2^4 . 3^2 . 5^2 = 720 . 5 = 3\,600.$

Για να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάςιο πίραμε το μεγαλίτερο αριθμο $2^4 . 3^2 . 5$ κε τον πολαπλαςιάςαμε επι 5 γιατι ο πολαπλαςιαςτις 5 ςτον μεγαλίτερο αριθμο τυ παραδίγματός-μας έχι μπι ςτιν πρότι δίναμι, κε ςτο πολαπλάςιο πρέπι να μπι ςτι δέφτερι δίναμι. Αλιότικα δεν θα διερεθι δια τυ αριθμυ 600. Για να βρύμε το πολαπλάςιο, πολαπλαςιάζοντας τον μεγαλίτερο αριθμο 720 με αφτον τον πολαπλαςιαςτι 5 πυ δεν έφτανε.

§ 13. Τα γνορίςματα τις διερετότιτας δια ςίνθετυ αριθμυ.

Ι ιδιότιτες τυ ελάχιςτυ πολαπλάςιυ με τις οπίες ίδι γνοριςτίκαμε μας επιτρέπυν να τονίςυμε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τις διέρεςις.

Εαν ο αριθμος διερίτε δια κάμποςον αμιβέα πρότον αριθμον, τότε διερίτε κε με οπιοδίποτε γινόμενο, πυ βρίςκετε απο τιν ςινένοςι αφτον τον παραγόντον ςε ομάδες.

Αφτι ι ίδια ιδιότιτα μας επιτρέπι να μάθυμε, αν διερίτε ο διερετέος δια ςίνθετυ αριθμυ τον οπίον μπορύμε να αναλίςυμε ςτυς 2, 4, 8 3, 9, 5 κε ςτυς αριθμυς, πυ ίνε πολαπλάςιάτυς, διλ. ςε τέτιυς αριθμυς, ςτυς οπίυς εμις εφαρμόζυμε τα προιγύμενα κε γνοςτα γνορίςματα τις διερετότιτας.

1. Ας βρύμε, αν διερύντε δια τυ 36 ι αριθμι 120 180,240,360.

Λ ί ς ι. Αναλίυμε τον αριθμο 36 ςε δίο αμιβέα πρότυς παράγοντες.

$$36 = 4 . 9.$$

Σίμφονα με τα γνορίςματα τις διερετότιτας, βρίςκυμε πος δια τυ 4 διερύντε όλι ι δεδομένι αριθμι: 120, 180, 240 κε 360. Αλα δια τυ 9 διερύντε μονάχα ο 180 κε ο 360. Αφτο ςιμένι πος μονάχα το 180 κε 360 ςινάμα διερύντε κε δια τυ 4 κε δια τυ 9 διλ. διερύντε δια (4 . 9) = 36.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Για τον καθοριςμο τις διερετότιτας πρέπι να αναλίςυμε τον διερέτι ςε τέτιυς παράγοντες, πυ να ίνε αμιβέα πρότι.

2. Διερύντε άραγε ι αριθμι 30, 40, 60, 80, δια το 12;

Λ ί σ ι. Αναλίυμε τον αριθμο 12 ςε δίο αμιβέα πρότυς παράγοντες: 12 = 3 . 4. Μονάχα ενας αριθμος του παραδιγματος διερίτε κε δια το 3 κε δια 4. Αφτος ίνε ο αριθμος 60. Ι αριθμι 40 κε 80 διερύντε δια 4, αλα δεν διερύντε δια 3, ο αριθμος 30 δεν διερίτε δια 4. Θα ίτανε λαθος αν αναλίαμε τον αριθμο 12 αλιοτικα. Π. χ: ι ανάλισι 12 = 2 . 6 δεν μας δίνι σοστι απάντισι (2 κε 6 δεν ινε αμιβέα προτι αριθμι), επιδι, αν κε δια 6 κε 2 διερύντε ι αριθμι 30 κε 60, αλα το 30 δεν διερίτε δια 12.

3. Ας ιποδίξυμε τα γνορίζματα τις διερετότιτας δια μερικον σίνθετον αριθμον, που σιχνα απαντιύντε.

Δια 6 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 2 κε δια 3.
Δια 12 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 3 κε δια 4.
Δια 15 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 3 κε δια 5.
Δια 18 διερύντε ι αριθμι, πυ διερύντε δια 2 κε δια 9.

VII. ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΤΕΣ ΤΟΝ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Τα μέρι τις μονάδας. Κλαζματικι αριθμι.

Για τιν καταμέτρισι του μάκρυς μεταχιριζόμαστε τι «μοναδα του μάκρυς». Ας τιν ονομασυμε απλος μονάδα. Κατα τιν καταμετρισι του μάκρυς μ' αφτι τι μονάδα μπορύμε να σιναντισυμε τέτια περίπτοσι, όστε ι μονάδα να χορέσι κατα μακρος τις καμποσες φορες κε ακόμα να μένι ένα κομάτι-τις μικρότερο απο τι μοναδα του μακρυς. Ετσι το μάκρος, πυ μετρισομε, δεν μπορύμε να το σιμιόσυμε με ακερεο αριθμο κε γι'αφτο ίνε ανάνκι να ισάγιμε νέους αριθμυς — κλαζματικυς.

Ας ιποθέσυμε πως έχυμε να μιράσυμε ενα κομάτι σχινιυ εκσίσυ σε τρία πρόσοπα. Κοφτυμε το σχινι σε τρια ίσια μέρι. Απο το κόπςιμο αφτο θάχυμε, το ένα τριτο του μερυς ολυ του σχινιυ. Για να μιρασυμε εκσίσυ 1 χγ ζάχαρι σκόνις σε τέσερα μεριδια πρέπι να διερέσυμε τι ζάχαρι σε 4 ίσα μέρι. Καθε μερος θα αποτελεσι το ένα τέταρτο μερος όλις τις ζάχαρις πυ έχυμε.

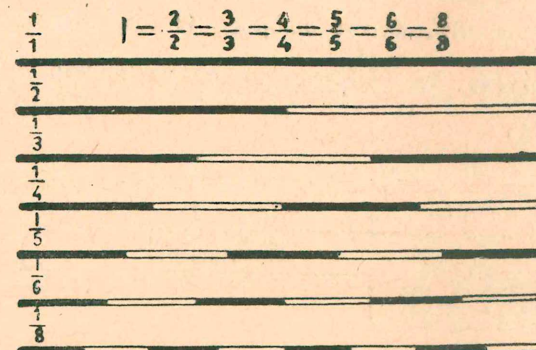
Κάθε ακερεο αριθμο κε τι μονάδα μπορύμε να παραστένυμε σαν ένα κομάτι εφθίας. Στο σχ. 3 πίρομε μια εφθια, πυ παραδεχτίκαμε για μονάδα. Δίπλα σ' αφτι κε κάτο, πίρομε εφθιες, πυ σχιματίστιχαν απο τι διέρεσι τις μονάδας σε δυο, τρία, τέσερα κε πεντε ίσα μέρι.

Αφτα τα μέρι ονομαζυντε: ένα δεφτερο τις μοναδας, ίτε μισο, ένα τρίτο μερος τις μονάδας, ένα τεταρτο, ενα πεμπτο μερος τις μοναδας. Για τιν παραστασι αφτον τον αριθμον ισαγυν νευς αριθμυς — κλαζματικυς αριθμυς, διότι ι ακέρει αριθμι χρισιμέβυν μονάχα για τιν παράστασι ακέρεον μονάδον κε δεν πάνε για τιν σιμίοσι τον μερον τις μονάδας.

Τυς κλαζματικυς αριθμυς, πυ ίβραμε σιμιόνυν ος εκσις:

Ενα δέφτερο μέρος : $\frac{1}{2}$, ένα τρίτο μέρος : $\frac{1}{3}$, ένα τέταρτο μερος : $\frac{1}{4}$, ένα πέμπτο μέρος : $\frac{1}{5}$.

Τα ίσα μέρι, στα οπία έχι διερεθι ι μονάδα, κάποτε ονομάζυν μερίδια τις μονάδας.



Ιχ. 3.

Τα μερίδια αφτα τις μονάδας παραστένοντε με δίο αριθμυς, πυ χορίζοντε με μια οριζόντιο γραμι. Ο αριθμος, πυ βρίσκετε κάτο απ' τι γραμι δίχνι πάντοτε σε πόσα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα κε πάνο στι γραμι στέκετε ι μονάδα. Τον αριθμο, πυ αποτελίτε απο ίσα μέρι τις μονάδας, επίσις τον ονομάζυν κλαζματικο αριθμο. Π.χ. όταν μιράζυμε 1 χγ. ζάχαρι (σκόνι) σε τέσερα ίσα μέρι κε πέρνυμε τρία τέτια μέρι, πάι να πι πέρνυμε τα τρία τέταρτα το όλο ποσο τις ζάχαρις, τρία τέταρτα του χιλιόγραμυ ζάχαρις — τρία τέταρτα τις μονάδας.

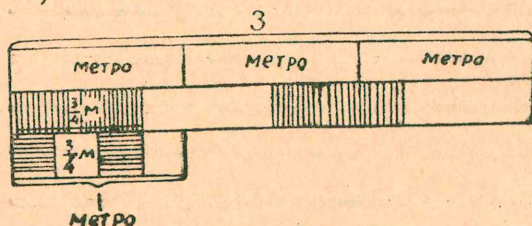
Ο αριθμος αφτος γράφετε έτσι: $\frac{3}{4}$ (τρία τέταρτα). Οπος φένετε απο τι γραφι, το πσιφίο πάνο απ' τι γραμι, δίχνι τον αριθμο τον μερον, πυ πίραμε.

Το πσιφίο κάτο απ' τι γραμι δίχνι σε πόσα ίσα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.

Αλα τον ίδιο αριθμο τρία τέταρτα μπορύμε να τον βρίσκυμε κατ' άλο τρόπο. Πέρνυμε σπάνκο ίτε κομάτι σχινι. Κόβυμε απ' αφτον ένα μέτρο κε ίστερα κσανα τρία μέτρα. Το μεγαλίτερο κομάτι του σχινιυ το διερύμε σε τέσερα μέρι. Διερύμε τα τρία μέτρα σε τέσερα μέρι. Το κο-

μάτι, πυ βρίςκυμε θάνε μάκρος 75 ςαντίμετρα. Τόρα πέρνυμε το μικρότερο κομάτι, πυ έχι μάκρος ένα μέτρο κε διερόντας-το ςε 4 μέρι, πέρνυμε τρία τέτια μέρι. Καθένα απ' αφτα θάνε 25 ςμ. Τα τρία μέρι έχυν μάκρος 75 ςμ. Το κομάτι, πυ έχι τέτιο μάκρος θα αποτελέςι τα $\frac{3}{4}$ τυ μέτρυ.

Μιράζοντας τα 3 μέτρα ςε 4 μέρι κε πέρνοντας τα $\frac{3}{4}$ απ' τόνα μέτρο, θάχυμε όμια εκςαγόμενα. Μπορύμε να γράπςυμε $3:4=\frac{3}{4}$. Το εκςαγόμενό-μας ίνε κλαζματικος αριθμος. Ο κλαζματικος αφτος αριθμος $\frac{3}{4}$ θάνε εκςαγόμενο τις διέρεςις τυ ακέρευ αριθμυ 3 δια τυ ακέρευ αριθμυ 4 (Ικ. 4).



Ικ. 4.

Στι γραφι αφτι το 4 δίχνι, ςε πόςα ίςια μερίδια μιράςτικε ι μονάδα. Το 3 δίχνι πόςα τέτια μερίδια πάρθικαν.

Κατ' αφτον τον τρόπο μπορύμε να βρίςκυμε τα $\frac{3}{4}$ χγ πςιλις ζάχαρις, διερόντας τα 3 χγ τις ζάχαρις ςε τέςερα μέρι.

Διερύμε πρότα ένα χιλιόγραμο ςε τέςερα μέρι, βρίςκυμε $\frac{1}{4}$ χγ. Κατόπιν διερύμε το δέφτερο κε τρίτο χιλιόγραμο κε κάθε φορα βρίςκυμε $\frac{1}{4}$ χγ. Ος αποτέλεζμα τις διέρεςις αφτις, πυ κάναμε τρις φορες θάχυμε τρις φορες απο $\frac{1}{4}$ χιλιόγραμυ. Το όλο θάχυμε τέςερα μέρι προς $\frac{3}{4}$ χγ το καθένα.

Προτυ να γνοριςτύμε με τυς κλαζματικυς αριθμυς δεν μπορύςαμε να διεκςάγυμε οπιαδίποτε διέρεςι· μπορύςαμε να διερέςυμε μονάχα μεγαλίτερο αριθμο δια μικροτέρυ. Πραγματικα, ακέρεο πιλίκο μπορύμε να βρύμε μονάχα τότε, όταν διερέςυμε μεγαλίτερο αριθμο δια μικρότερυ, ίτε ίςυς αριθμυς. Μα όταν ιςάχτικαν ι κλαζματικι αριθμι, έγινε δινατι

κάθε διέρεςι, ακόμα κε διέρεςι μικρότερυ αριθμυ δια μεγαλίτερυ. Εκςαγόμενο τις διέρεςις θάνε κλαζματικος αριθμος. Ετςι ο κλαζματικος αριθμος ίνε εκςαγόμενο τις διέρεςις διο ακέρεον αριθμον. Γι' αφτο τυς κλαζματικυς αριθμυς τυς ςιμιόνυν με δίο πςιφία, ανάμεςα ςτα οπία φέρυν οριζόντια γραμι — ςιμίο διέρεςις.

Ο αριθμος, πυ βρίςκετε πάνο απ' τι γραμι ονομάζετε **αριθμιτις** τυ κλάζματος· ο αριθμος, πυ βρίςκετε κάτο απ' τι γραμι ονομάζετε **παρονομαςτις** τυ κλάζματος.

Οριςμι. **I. Παρανομαςτις κλαζματικυ αριθμυ ονομάζετε ο ακέρεος αριθμος, πυ δίχνι, ςε πόςα ίςα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.**

II. Αριθμιτις κλαζματικυ αριθμυ ονομάζετε ο ακέρεος αριθμος, πυ δίχνι, πόςα μέρι τις μονάδας παρέχι το κλάζμα.

Τον αριθμιτι κε τον παρανομαςτι χορίζυν με γραμι. Κατα τιν απανκελία, πρότα απανκέλυν τον αριθμιτι, έπιτα τον παρανομαςτι τυ κλάζματος.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Τον κλαζματικο αριθμο ςίντομα γράφον με τιν λέκςι „κλάζμα“.

Επιδι το κλάζμα ίνε αποτέλεζμα τις διέρεςις μπορύμε να ονομάςυμε αφτο κε τα ςιςτατικα μέρι-τυ με διο τρόπυς:

1) πιλίκο $\frac{4}{5}$ 4 — διερετέος, 5 — διερέτις, 2) κλάζμα: $\frac{4}{5}$ 4 — αριθμιτις, 5 — παρανομαςτις.

§ 2. Κλάζμα ίνε λόγος δίο αριθμον.

1. Ι μια μπριγάδα τυ κολχοζ έςπιρε 75 εκτάρια. Ι άλι μπριγάδα έςπιρε 150 εκτάρια. Πρέπι να ςινκρίνυμε, πια μπριγάδα έκανε περιςότερι δυλια κε κατα πόςες φορες.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα αφτο λίνετε με τι διέρεςι.

$150:75=\frac{150}{75}=2$. Ι δέφτερι μπριγάδα έκανε 2 φορες περιςότερι δυλια.

Οριςμος. **Το αποτέλεζμα τις ςίνκριςις δίο αριθμον μέςον τις διέρεςις ονομάζετε λόγος διο αριθμον.**

Ο διερετέος ονομάζετε ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο διερέτις — επόμενος όρος τυ λόγυ.

Στο πρόβλιμα αφτο ο λόγος θα ίνε $\frac{150}{75}=2$. Ιγύμενος όρος το 150, επόμενος το 75.

2. Ενα κολχοζ ίχε 851 εκτ. καλιεργίςιμις γις. Σίμφονα με το πλάνο 320 εκτ. θα καλιεργίςυν ι μπριγάδες, πυ έχυν ςτι διάθεςί-τυς

μιχανες κε άλογα κε το ιπόλιπο θα καλιεργιθι με τράχτορ. Πόσο μέρος όλις τις εργασίας θα χάνυν ι πρότες μπριγάδες;

Εδο πρέπι να ςινκρίνυμε μέσον τις διέρεςις τιν εργασία τον μπριγάδον, πυ εργάζοντε με άλογα με κίνι τιν εργασία, τιν οπία πρέπι να κάνυμε ς' όλο το κολχοζ.

$$320:851=\frac{320}{851}.$$

Στο παράδιγμα αφτο το λόγο δεν μπορύμε να τον παραστίςυμε με ακέρεο αριθμο κε γι' αφτο βρίςκυμε κλαζματικο αριθμο: $\frac{320}{851}$, πυ δίχνι, πόσο μέρος όλις τις εργασίας θα χάνυν ι μπριγάδες, πυ εργάζοντε με άλογα.

Το κλάζμα αφτο μπορύμε να το ονομάσυμε λόγο, αλα μπορύμε να το ονομάςυμε κε πιλίκο, πυ έχι προκίπςι απ' τι διέρεςι. Ενας κε ο αφτος αριθμος $\frac{320}{851}$ θα έχι τις ακόλυθες ονομαςίες:

1) πιλίκο: $\frac{320}{851}$ — 320 — διερετέος, 851 — διερέτις

2) λόγος: $\frac{320}{851}$ — 320 — ιγύμενος όρος τις αναλογίας, 851 — επόμενος όρος τις αναλογίας

3) κλάζμα: $\frac{320}{851}$ — 320 — αριθμιτις, 851 — παρανομαςτις.

Τα ςιμία $<$ κε $>$ χριςιμέβυν για να ιποδιχτι, πος ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος τυ άλυ.

$$\frac{1}{2}<1$$

διαβάζετε έτςι: το ένα δέφτερο ίνε μικρότερο τις μονάδας.

$$1>\frac{1}{3}$$

διαβάζετε έτςι: ι μονάδα ίνε μεγαλίτερι τυ ενος τρίτυ.

Το ςιμίο $<$ έχι στραμένι τιν εχμι προς το μικρότερο αριθμο.

§ 3. Κλάζματα κίρια κε καταχριςτικα. Μιχτος αριθμος.

1. Πάνο στο ςχίμα 3 (ςελ. 65) ι μονάδα κε τα μέρι-τις έχυν παρασταθι ςαν τμίματα εφθίας. Κάθε μέρος ίνε μικρότερο τις μονάδας. Μπορύμε λιπον να γράπςυμε:

$$\frac{1}{2}<1,\quad \frac{1}{3}<1,\quad \frac{1}{4}<1,\quad \frac{1}{5}<1.$$

Τα κλάζματα, πυ παραστένυν ένα οπιοδίποτε μέρος τυ ακέρευ, ίνε μικρότερα τις μονάδας.

Επίςις θα ίνε μικρότερι τις μονάδας κε τέτιι αριθμι:

$$\frac{2}{5}<1,\quad \frac{3}{5}<1,\quad \frac{4}{5}<1.$$

Το κλάζμα (αν παραστένι κάμποςα μέρι τις μονάδας) θα ίνε μικρότερο τις μονάδας στιν περίπτοςι εκίνι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε ίνε μικρότερος τυ αριθμυ, πυ δίχνι ςε πόςα ίςα μέρι έχι διερεθι ι μονάδα.

Τα κλάζματα, πυ ίνε μικρότερα τις μονάδας ονομάζοντε **κίρια κλάζματα.** Στα κίρια κλάζματα ο αριθμιτις ίνε πάντοτε μικρότερος τυ παρανομαςτι.

2. Σινκρίνοντας τα μέρι τις μονάδας κε τιν ακέρεα μονάδα (ςχιμ. 3) μπορύμε επίςις να πύμε, πος:

$$=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}.$$

Το κλάζμα ιςύτε με τιν μονάδα ςε κίνιν τιν περίπτοςι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε κε ο αριθμος τον μερον στα οπία έχι διερεθι ι μονάδα, ίνε ίςα. Σ' αφτι τιν περίπτοςι ο αριθμιτις τυ κλάζματος πάντοτε ιςύτε με τον παρανομαςτι. Τέτιο κλάζμα ονομάζετε **καταχριςτικο κλάζμα.**

3. Μένι να εκςετάςυμε τιν περίπτοςι, όταν ο αριθμος τον μερον, πυ πίραμε, θα ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ τον μερον, στα οπία έχι διερεθι ι μονάδα.

$$\frac{6}{5}>1,\quad \frac{8}{5}>1,\quad \frac{23}{5}>1.$$

Ολι αφτι ι αριθμι ίνε μεγαλίτερι τις μονάδας. Επιδι όμος αφτι αποτελύντε απο μέρι τις μονάδας, γι' αφτο κε θα ίνε κλαζματικι αριθμι. Αφτυς επίςις ονομάζυν **κλάζματα καταχριςτικα.** Στα καταχριςτικα κλάζματα αφτυ τυ ίδυς ο αριθμιτις ίνε μεγαλίτερος τυ παρανομαςτι.

Οριζμος. **Κίριο ονομάζετε το κλάζμα όταν ίνε μικρότερο τις μονάδας. Καταχριςτικο ονομάζετε το κλάζμα, όταν ιςύτε με τιν μονάδα, ίτε ίνε μεγαλίτερο τις μονάδας.**

Βλέπυμε, πος εαν το κλάζμα ίνε:

1) μικρότερο τις μονάδας, τότε ο αριθμιτίς-τυ ίνε μικρότερος τυ παρονομαςτι,

2) μεγαλίτερο τις μονάδας, τότε ο αριθμιτίς-τυ ίνε μεγαλίτερος τυ παρονομαςτι,

3) ίσο με τι μονάδα, τότε ο αριθμιτίς-τυ ισύτε με τον παρονομαστι.

Μεταχσι τον κλασμάτον: $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{42}{15}$, $\frac{26}{10}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{36}{30}$, $\frac{17}{17}$

καταχριστικα ίνε: $\frac{42}{15}$, $\frac{26}{10}$, $\frac{36}{30}$, $\frac{17}{17}$,

κίρια ίνε: $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{13}$.

4. Ιπάρχι ακόμι κε ένα άλο ίδος κλαζματικυ αριθμυ. Ο αριθμος αφτος, αποτελίτε απο ακέρεο κε απο κλαζματικο. Τέτιος αριθμος ονομάζετε **μιχτος** αριθμος. Το κλαζματικο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ σινίθος έχι μορφι κίριυ κλάζματος.

Τυς μιχτυς αριθμυς τυς γράφυν σιντομεβμένα:

$$1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2},\quad 3+\frac{5}{7}=3\frac{5}{7},\quad 8+\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}.$$

Κατα τι γραφι το σιμίο τις πρόσθεσις παραλίπετε.

Ι αριθμι: $1\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{7}$, $8\frac{3}{4}$ — ίνε μιχτι αριθμι.

§ 4. Τροπι ακερέυ κε μιχτυ αριθμυ σε καταχριστικο κλάζμα.

Ορισμος. **Ο αριθμος, πυ αποτελίτε απο ακέρεο αριθμο κε απο κλαζματικο, ονομάζετε μιχτος.**

1. Οταν διερύμε τιν εφθία, πυ παραδεχτίκαμε ως μονάδα, σε 2, 4, 8 ίσα μέρι, μπορύμε να γράπσυμε, πος κάθε μέρος ισύτε με $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Απο τι μονάδα πέρνυμε δίο δέφτερα, τέσερα τέταρτα κε οχτο όγδοα:

$$1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}.$$

Ινε έφκολο να βρύμε, πόσα δέφτερα, τέταρτα, όγδοα μερίδια περιέχυν δίο μονάδες, τρις μονάδες...

$$2=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8},\qquad 3=\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=\frac{24}{8}.$$

Ολα αφτα τα κλάζματα θα ίνε καταχριστικα κλάζματα.

2. Να τραπυν σε δεκαταπέμτα κε ικοστα μέρι ι ακέρει αριθμι: 5, 10, 8.

Λίσι. $5=\frac{75}{15}=\frac{100}{20}$, $10=\frac{150}{15}=\frac{200}{20}$, $8=\frac{120}{15}=\frac{160}{20}$.

3. Με τον ίδιο τρόπο παραστένυν ος κλάζματα κε οπιυσδίποτε ακέρεους αριθμυς. Ος παρονομαστι μπορύμε να πάρυμε όπιο αριθμο θέλυμε.

Π. χ: $11=\frac{33}{3}=\frac{44}{4}$, $6=\frac{12}{2}=\frac{24}{4}$.

4. Κσέροντας να τρέπσυμε ακέρεο αριθμο σε καταχριστικο κλάζμα, μπορύμε να τρέπσυμε σε καταχριστικο κλάζμα κε μιχτο αριθμο.

Να τραπυν σε καταχριστικα κλάζματα ι μιχτι αριθμι:

1) $2\frac{3}{4}$, 2) $5\frac{7}{8}$, 3) $2\frac{3}{5}$.

Λίσι. 1) $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, διότι ι μονάδα περιέχι τέσερα τέταρτα, δίο μονάδες περιέχυν (4 . 2) οχτο τέταρτα, εαν προσθέσυμε τρία τέταρτα μερίδια, τότε το όλο θα γίνυν έντεκα τέταρτα:

$$2\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4},\quad \frac{8}{4}\text{ κε }\frac{3}{4}\text{ αποτελυν }\frac{11}{4}.$$

2) $5\frac{7}{8}=\frac{47}{8}$, 3) $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$.

Για να τρέπσυμε μιχτο αριθμο σε καταχριστικο κλάζμα, πρέπι τον παρονομαστι τυ κλάζματος τυ μιχτυ να πολαπλασιάσυμε επι τον ακέρεο αριθμο κε να προσθέσυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος. Αφτο θα δόσι αποτέλεσμα τον αριθμιτι. Ο παρονομαστις μένι ο ίδιος.

§ 5. Εκσαγογι τυ ακέρευ μέρυς απο το καταχριστικο κλάζμα.

Ι τροπι τυ ακέρευ αριθμυ με κλάζμα σε καταχριστικο γίνετε με τι βοίθια τυ πολαπλασιασμυ κε τις πρόσθεσις.

Ι διέρεσι, κατα τιν οπία βρίσκυμε στο πιλίκο μιχτο αριθμο, μας επιτρέπι να λίσυμε αντίθετο πρόβλιμα: Να εκσάγυμε τον ακέρεο αριθμο απο το καταχριστικο κλάζμα.

Οριζμος. **Να εκςάγυμε το ακέρεο μέρος απο το κλάζμα ςιμένι να μάθυμε, πόςες ακέρεες μονάδες περιέχι το καταχριςτικο κλάζμα.**

Να βγάλυμε το ακέρεο μέρος τυ κλάζματος $\frac{33}{8}$.

Λ ί ς ι. Επιδι ο $\frac{8}{8}$ αποτελι τι μονάδα, ο $\frac{33}{8}$ θα περιέχι τόςες μονάδες, όςες φορες χορι το 8 ςτον 33. Διερύμε. Εαν διερύμε τον 33 δια τυ 8 ςίμφονα με τον κανόνα τις διέρεςις τον ακέρεον αριθμον, τότε θα βρίςκυμε ακέρεο πιλίκο 4 κε ακόμα ιπόλιπο.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 8 \\ \hline -\,32 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Διερόντας το ιπόλιπο 1 δια τυ 8, θα έχυμε $\frac{1}{8}$.

Επομένος: $\frac{33}{8} = 4 + \frac{1}{8} = 4\ \frac{1}{8}$.

Για να βγάλυμε τον ακέρεο αριθμο απο το κλάζμα, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος δια τυ παρονομαςτί-τυ· το πιλίκο, πυ βρίςκυμε δίνι το ακέρεο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ, το δε ιπόλιπο θα ίνε ο αριθμιτις τυ κλαζματικυ μέρυς τυ αριθμυ. Διερέτις θα ίνε ο παρονομαςτις τυ κλαζματικυ μέρυς.

§ 6. Σίνκριςι τυ μεγέθυς τον κλαζμάτον, πυ έχυν τυς ίδιυς παρονομαςτες ίτε τυς ίδιυς αριθμιτες.

Ος τόρα μάθαμε να ςινκρίνυμε τα κλάζματα με τι μονάδα, αλα μπορύμε να ςινκρίνυμε τα κλάζματα κε αναμετακςί-τυς.

I. Κ λ ά ζ μ α τ α μ ε ί δ ι υ ς α ρ ι θ μ ι τ ε ς.

1. Ας πάρυμε τενία — μέτρο κε ας τιν διερέςυμε ςε 2, 4, 5, 10, 50 μέρι. Ορίζοντας πόςα μιλίμετρα περιέχυν τα μέρι:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{50}\,\mu,$$

κε ςινκρίνοντας τα μάκρι αφτον τον μερον, μπορύμε να ςινκρίνυμε τυς κλαζματικυς αριθμυς, πυ παραςτένυν αφτα τα μέρι.

Ας βάλυμε τα κλάζματα ςτι ςιρα κατα το μέγεθός-τυς. Θα έχυμε τι ςιρα: $\frac{1}{50},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$.

Βλέπυμε, πος όςο μεγαλόνι ο αριθμος τον διερέςεον, τόςο μικρένυν τα μερίδια κε το ίδιο το κλάζμα.

Ας ςινκρίνυμε τυς ακέρευς αριθμυς: 20, 17, 13, 11, 10, 9, 8, 3, 2 κε τα κλάζματα:

$$\frac{1}{20},\ \frac{1}{17},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}.$$

Βρίςκυμε τέτιες ανιςότιτες, πυ ςιμιόνυμε τιν ςινκριτικί-τυς ακςία:

$$20 > 17 > 13 > 11 > 10 > 9 > 8 > 3 > 2,$$

$$\frac{1}{20} < \frac{1}{17} < \frac{1}{13} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

Ι αριθμι τις πρότις ςιρας δίχνυν τον αριθμο τον μερον τις μονάδας.

Ι αριθμι τις δέφτερις ςιρας δίχνυν, με τι ιςύτε κάθε μέρος.

Εαν διερύμε τιν μονάδα ςε μέρι, τότε το μέγεθος κάθε μέρυς ίνε τόςο μικρότερο όςο μεγαλίτερος ίνε ο αριθμος τον μερον, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα.

Ο κανόνας αφτος μας επιτρέπι να ςινκρίνυμε τα κλάζματα, τον οπίον ο αριθμιτις ιςύτε με τιν μονάδα.

Κςέροντας να ςινκρίνυμε τέτια κλάζματα, έφκολα μπορύμε να πάμε ςτι ςίνκριςι πιο ςίνθετον κλαζμάτον.

2. Να ςινκριθι ι ακςία τον κλαζμάτον:

α) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}$,) $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{7}$, γ) $\frac{4}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{4}{7}$.

Σ' όλα τα παραδίγματα ο αριθμιτις όλον τον κλαζμάτον ίνε ο ίδιος. Τα κλάζματα ίνε βαλμένα ος προς τιν ακςία-τυς ςε κατιύςα ςιρα. Απ' τα κλάζματα, πυ έχυν τυς ίδιυς αριθμιτες, μεγαλίτερα ίνε εκίνα, τον οπίον ο παρονομαςτις ίνε μικρότερος. Ινε ςοςτος κε ο ακόλυθος κανόνας.

Οταν αφκςένυμε τον παρονομαςτι χορις ν'αλάκςυμε τον αριθμιτι το μέγεθος τυ κλάζματος ελατόνετε.

II. Ο μ ό ν ι μ α κ λ ά ζ μ α τ α. 3. Να ςινκρίνετε τα μεγέθι τον ακόλυθον κλαζμάτον: $\frac{1}{3}$ κε $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{5}$ κε $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$ κε $\frac{4}{7}$.

Λ ί ς ι. $\frac{4}{3} > \frac{1}{3},\ \frac{4}{5} > \frac{1}{5},\ \frac{4}{7} > \frac{1}{7}$.

4. Να ςινκριθυν τα κλάζματα: $\frac{1}{11},\ \frac{5}{11},\ \frac{8}{11},\ \frac{27}{11},\ \frac{30}{11}$.

Απο τα ομόνιμα κλάζματα το μεγαλίτερο ίνε κίνο, πυ έχι τον μεγαλίτερο αριθμιτι, επιδι με τιν άφκςιςι τυ αριθμιτι μεγαλόνι κε ο αριθμος τον μερον· γι'αφτο:

$$\frac{30}{11} > \frac{27}{11} > \frac{8}{11} > \frac{5}{11} > \frac{1}{11}.$$

Οταν μεγαλόνυμε τον αριθμιτι χορις να αλάκςυμε τον παρονομαςτι, ι ακςία τυ κλάζματος μεγαλόνι.

§ 7. Πος αλάζι το κλάζμα, όταν αλάζυμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτί-τυ.

1. Αν πάρυμε ένα μέτρο, πυ να το παραδεχτύμε για μονάδα κε το διερέςυμε ςε 20 μέρι, τότε θα έχυμε ένα κομάτι, πυ θα αποτελι το $\frac{1}{20}$ μέρος όλις τις μονάδας.

Αν πάρυμε πέντε τέτια μέρι, τότε θα έχυμε $\frac{5}{20}$. Ο αριθμιτις τυ κλάζματος $\frac{5}{20}$ ίνε πέντε φορες μεγαλίτερος απο τον αριθμιτι τυ κλάζματος $\frac{1}{20}$. Απο δο φένετε, πος κε το κλάζμα $\frac{5}{20}$ ίνε πέντε φορες μεγαλίτερο απο το $\frac{1}{20}$. Αφτο μπορύμε να το δοκιμάςυμε με τιν καταμέτριςι.

Ετςι μπορύμε με το $\frac{1}{5}$ τις μονάδας να ςχιματίςυμε τυς αριθμυς $\frac{3}{5}$ κε $\frac{6}{5}$. Αφτα θα ίνε γραμες μάκρος $\frac{3}{5}$ μ κε $\frac{6}{5}$ μ. Σινκρίνοντας το μάκρος $\frac{6}{5}$ κε $\frac{3}{5}$, βλέπυμε, ποςο $\frac{6}{5}$ ίνε διο φορες μεγαλίτερος, απο τον $\frac{3}{5}$. Ο αριθμιτις τυ κλάζματος $\frac{6}{5}$ ίνε μεγαλίτερος απο τον αριθμιτι τυ κλάζματος $\frac{3}{5}$ κατα 2 φορες, κε ο ίδιος αριθμος $\frac{6}{5}$ ίνε μεγαλίτερος τυ αριθμυ $\frac{3}{5}$ κατα 2 φορες.

Ας πάρυμε μια ςιρα κλαζμάτον: $\frac{2}{25}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{14}{25}$, ας ςινκρίνυμε τα ακολυθύντα κλάζματα με το πρότο κλάζμα τις ςιρας. Θα δύμε, πος ο αριθμιτις καθενος ακολυθύντος κλάζματος ίνε μεγαλίτερος απο τον αριθμιτι τυ πρότυ κλάζματος 3, 4, 5, κε 7 φορες. Κε τόςες φορες ι ακςία καθενος κλάζματος ίνε μεγαλίτερι τις ακςίας τυ πρότυ κλάζματος.

Για να βρίςκυμε καθένα απο τα ακολυθύντα κλάζματα, πρέπι τον αριθμιτι τυ πρότυ κλάζματος να μεγαλόςυμε 3, 4, 5 κε 7 φορες.

1. Για να μεγαλόςυμε ένα κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι τόςες φορες να μεγαλόςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος, χορις ν'αλάκςυμε τον παρονομαςτι.

Μπορύμε να δοκιμάςυμε το ςιμπέραζμα ςίμφονα με τις ιδιότιτες το πιλίκυ, πέρνοντας για διερετέο τον αριθμιτι κε για διερέτι τον παρονομαςτι.

2. Να ελατοθυν τα κλάζματα: $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{5}{8}$ κατα 5 φορες.

Ο αριθμιτις τον κλαζματικον αφτον αριθμον διερίτε δια 5. Ελατόνοντας τυς αριθμιτες 5 φορες θα έχυμε: $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8}$.

Καθένας απ' αφτυς τυς αριθμυς ίνε 5 φορες μικρότερος απο τον αντίςτιχό-τυ αριθμο τυ παραδίγματος.

II. Για να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να ελατόςυμε αν ίνε δινατο, τον αριθμιτί-τυ τόςες φορες.

3. Ας δίκςυμε τόρα, πος μπορύμε να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες με άλο τρόπο.

Σινκρίνοντας τα κλάζματα $\frac{1}{4}$ κε $\frac{1}{8}$, μπορύμε να πύμε, πος το δέφτερο κλάζμα ίνε μικρότερο τυ πρότυ 2 φορες, διότι ο αριθμος τον μεριδίον, ςτα οπία έχι διερεθι ι μονάδα τυ δέφτερυ κλάζματος, ίνε διο φορες μεγαλίτερος, όςτε κάθε μερίδιο ίνε διο φορες μικρότερο. Ο παρονομαςτις τυ μικρότερυ κλάζματος ίνε 2 φορες μεγαλίτερος τυ παρονομαςτι τυ μεγαλίτερυ κλάζματος.

Με τον ίδιο τρόπο ςιμπερένυμε, πος ο $\frac{3}{8}$ ίνε διο φορες μικρότερος απο τον $\frac{3}{4}$. Κε εδο ο παρονομαςτις τυ κλάζματος $\frac{3}{8}$ ίνε διπλάςιος τυ παρονομαςτι τυ κλάζματος $\frac{3}{4}$. Τι δοκιμι τις ορθότιτας τις πράκςις αφτις τιν κάνυμε με τι βοίθια τυ μέτρυ (τενίας) πέρνοντας το μέτρο ος μονάδα.

Εάν θα ςινκρίνυμε τα κλάζματα: $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{20}$, επίςις θα δύμε, πος ι ελάτοςι τυ κλάζματος κατα διο φορες ςινοδέβετε με τιν άφκςιςι τυ παρονομαςτί τυ κατα 2 φορες. Κατα τιν ελάτοςι τυ κλάζματος κατα

4 φορες, ο παρονομαςτις αφκςένι 4 φορες. Τιν ιδιότιτα αφτι τον κλαζματικον αριθμον μπορύμε να διατιπόςυμε ος εκςις:

III. Για να ελατόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να μεγαλόςυμε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος τόςες φορες.

Μπορύμε να μεγαλόςυμε το κλάζμα, ελατόνοντας τον παρονομαςτί-τυ.

4. Ας μεγαλόςυμε τα κλάζματα: α) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, κατα 3 φορες, β) $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$ κατα 5 φορες.

Λ ύ ς ι. α) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, β) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$.

IV. Για να μεγαλόςυμε το κλάζμα κάμποςες φορες, πρέπι να ελατόςυμε, αν ίνε δινατον, τον παρονομαςτί-τυ τόςες φορες.

§ 8. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος.

Πέρνυμε μέτρο διερεμένο ςε ςαντίμετρα. Το παραδεχόμαςτε ςαν μονάδα κε χορίζυμε πρότα $\frac{2}{5}$ αφτις τις μονάδας, κε έπιτα $\frac{20}{50}$ κε ςινκρίνυμε τα εβριςκόμενα κομάτια, θα δύμε πος αφτα τα κομάτια ίνε ίςα. Οςτε θα ίνε ίςι κε ι αντίςτιχι αριθμι:

$$\frac{2}{5}=\frac{20}{50}.$$

Τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ δέφτερυ κλάζματος, μπορύμε να βρύμε με τον πολαπλαςιαζμο τυ αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ πρότυ κλάζματος επι 10.

Ετςι θα ίνε ίςι κε ι κλαζματικι αριθμι:

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{8}{20}=\frac{20}{50}=\frac{40}{100},$$

ίτε κατ' αντίθετι ςιρα:

$$\frac{40}{100}=\frac{20}{50}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Σινκρίνοντας τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τον κλαζμάτον αφτον, βλέπυμε, πος ο αριθμιτις καθενος ακολυθύντος κλάζματος βρίςκετε απο τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ προιγύμενυ κλάζματος με τον πολαπλαςιαζμο ίτε τιν διέρεςι με ένα κε τον ίδιο αριθμο.

Αν θα εκςακολυθίςυμε μια ςιρα ιςοτίτον:

$$1)\ \frac{7}{20}=\frac{21}{60}=\frac{28}{80},\quad 2)\ \frac{8000}{24000}=\frac{4000}{12000}=\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},$$

έφκολα θα ενοίςυμε, πος τιν πρότι ςιρα ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις μεγαλόνυν κατα 3, 4 ... φορες, ςτι δέφτερι ςιρα λιγοςτέβυν κατα 2, 8, 100... φορες. Στα παραδίγματα αφτα ι αξία τυ κλάζματος δεν αλάζι απ' τον πολαπλαςιαζμο ίτε τι διέρεςι τυ αριθμιτι κε τυ παρονομαςτι με ένα κε τον ίδιο αριθμο.

Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος. **Ι ςιμαςία τυ κλάζματος δεν μεταβάλετε, εαν τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος πολαπλαςιάζυμε ι διερύμε με ένα κε τον ίδιο αριθμο.**

Ας γράψυμε τιν ιδιότιτα αφτι με γράματα: $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$.

Τιν κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μπορύμε να τιν εκςιγίςομε κι αλιότικα.

Ας πάρυμε ένα οπιοδίποτε κλάζμα: π. χ. $\frac{20}{30}$. Ας πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτί-τυ επι 5. Το κλάζμα θα μεγαλόςι 5 φορες. Ας πολαπλαςιάςυμε τόρα τον παρονομαςτι τυ εβρεθέντος κλάζματος επι 5. Το κλάζμα θα λιγοςτέψι 5 φορες. Οςες φορες μεγάλοςε το κλάζμα, όταν πολαπλαςιάςαμε τον αριθμιτί-τυ επι 5, τόςες φορες λιγόςτεψε όταν πολαπλαςιάςαμε τον παρονομαςτί-τυ επι 5, ι αξία τυ κλαζματικυ αριθμυ απ' αφτο δεν άλαξε.

Το ίδιο θα ςιμβι, αν κε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτί-τυ θα διερέςυμε με ένα κε τον ίδιο αριθμο. Ας διερέςυμε τον αριθμιτι κε παρονομαςτι τυ κλάζματος $\frac{20}{35}$ δια 5. Διερόντας τον αριθμιτι ελατόςαμε το κλάζμα 5 φορες, διερόντας τον παρονομαςτι αφξίςαμε αφτο 5 φορες. Κε τελεφτέα το μέγεθος τυ κλάζματος απ'αφτο δεν άλαξε: $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$.

§ 9. Απλοπίιςι τυ κλάζματος.

1. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να κάνυμε τιν απλοπίιςι.

Οριςμος. **Να απλοπιίςυμε ένα κλάζμα — ςιμένι να παραςτένυμε αφτο ςε μορφι κλάζματος με μικρότερο αριθμιτι κε παρονομαςτι, χορις να αλάξυμε το μέγεθός-τυ.**

π. χ. $\frac{3600}{8400}=\frac{36}{84}=\frac{3}{7}$.

Το μέγεθος τυ κλάζματος δεν αλαχσε, όταν περνόντας απο το πρότο κλάζμα στο τρίτο, διερέσαμε δια τυ αφτυ αριθμυ τον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος. Διλαδι: διερέσαμε τον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος πρότα δια 100 κε ίστερα δια 12.

Για να απλοπιίσυμε ένα κλάζμα, πρέπι να διερέσυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαστι τυ κλάζματος δια τον κινον διερετόν-τυς, οσότυ ο αριθμιτις κε ο παρονομαστίς-τυ να καταντάνε αμιβέα πρότι αριθμι.

2. Να παρασταθυν τα ακόλυθα πιλίκα σε μορφι απλον κλαζμάτον: 50 : 70, 20 : 25, 400 : 900, 5000 : 8 000 ίτε να απλοπιιθυν.

Λίσι: $\frac{50}{70}=\frac{5}{7}$, $\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, $\frac{400}{900}=\frac{4}{9}$, $\frac{5000}{8000}=\frac{5}{8}$.

Παρατίρισι. Για τιν απλοπίισι τον κλαζμάτον εποφελύντε τα γνορίζματα τις διερετότιτας.

3. Να απλοπιιθι το κλάζμα $\frac{180}{360}$.

Λίσι. $\frac{180}{360}=\frac{18}{36}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Πρότι φορα απλοπιίσαμε το κλάζμα δια τυ 10. Μετα τιν πρότι απλοπίισι βρίκαμε 18 στον αριθμιτι κε 36 στον παρονομαστι, ι οπίι διερύντε δια τυ 9. Μετα τι δέφτερι απλοπίισι βρίσκυμε το κλάζμα $\frac{2}{4}$. Απλοπιόντας δια 2, έχυμε $\frac{1}{2}$.

Ας κάνυμε ένα παράδιγμα πιο σίνθετις απλοπίισις.

4. Να απλοπιιθι το κλάζμα: $\frac{2310}{7700}$.

Λίσι. Σίμφονα με τα γνορίζματα τις διερετότιτας απλοπιύμε τον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος δια 10 κε βρίσκυμε:

$$\frac{2310}{7700}=\frac{231}{770}.$$

Κανένα απο τα γνορίζματα τις διερετότιτας δεν ιπάρχι, πυ να μας λέγι, πος ίνε δίνατο να εξακολυθίσυμε τιν απλοπίισι. Τότε αρχίζυμε να δοκιμάζυμε αν απλοπιίτε ο αριθμος δια τον πρότον αριθμον, αρχίζοντας τι δοκιμι κατα σιρα με τον πίνακα τον πρότον αριθμον.

Ιστερα απο το δίο, τρία κε πέντε έρχετε ο πρότος αριθμος 7. Απλοπιύμε δια 7.

$$\frac{231}{770}=\frac{33}{110}.$$

Ο ακόλυθος πρότος αριθμος ίνε ο 11. Απλοπιύμε δια 11:

$$\frac{33}{110}=\frac{3}{10}.$$

Να συνεχίσυμε τιν απλοπίισι δεν ίνε πια δινατο.

§ 10. Τροπι ετερονίμον κλαζμάτον σε ομόνιμα.

Στιν § 6 τυ κεφαλέυ τύτυ, μάθαμε να σινκρίνυμε τα ομόνιμα κλάζματα, διλ. εκίνα, πυ έχυν τυς ίδιυς παρονομαστες. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να σινκρίνυμε τα ετερόνιμα κλάζματα, διλ. εκίνα, πυ έχυνε διάφορυς παρονομαστες. Γι' αφτο αντικαθιστύμε τα ετερόνιμα κλάζματα με ισοδίναμα ομόνιμα: αφτι ι αντικατάστασι ονομάζετε ***τροπι τον κλαζμάτον σε ομόνιμα.***

1. Να τραπυν σε ομόνιμα τα κλάζματα: $\frac{7}{12}$ κε $\frac{9}{20}$.

Το πρόβλιμα αφτο έχι πολες λίσις. Μπορύμε να διαλέχσυμε όσα θα θέλαμε κλάζματα, τα οπία να ίνε ίσα με το κλάζμα $\frac{7}{12}$. Επίσις μπορύμε να βρύμε απεριόριστο αριθμο κλαζμάτον ίσον με το κλάζμα —. Απο τα κλάζματα τις πρότις κε δέφτερις σιρας, θα μπορύσαμε να διαλέχσυμε διο ομόνιμα κλάζματα. Ο αριθμος αφτον τον κλαζμάτον τον παρμένον ανα δίο ίνε απεριόριστος. Ετσι:

$$\frac{7}{12}=\frac{35}{60}=\frac{70}{120}=\frac{105}{180}=\frac{140}{240}=\ldots$$

$$\frac{9}{20}=\frac{27}{60}=\frac{54}{120}=\frac{81}{180}=\frac{108}{240}\ldots$$

Για να αποφίγυμε τις περιττες πράχσις, κατα τιν τροπι τον κλαζμάτον σε ομόνιμα, διαλέγυμε τέτια κλάζματα τον οπίον παρονομαστις να ίνε το ελάχιστο πολαπλάσιο τον αριθμον, πυ ίνε παρονομαστις τον δοθέντον κλαζμάτον. Ετσι κε στο παράδιγμά-μας, το ελάχιστο πολαπλάσιο τον παρονομαστον, ίνε ο αριθμος 60· τοτε:

$$\frac{7}{12}^{(5)}=\frac{35}{60},\quad \frac{9}{20}^{(3)}=\frac{27}{60}.$$

Παρατίρισι. Διερόντας το 60 πρότα δια 12 κε έπιτα δια 20, θα βρόμε τυς αριθμυς 5 κε 3, πυ δίχνυν κατα πόσο πρέπι να πολαπλασιάσυμε τον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ πρότυ κε δέφτερυ κλάζματος, για να μετατρέπσυμε το κλάζμα τύτο σε κλάζμα με παρονομαστι 60.

Τον αριθμο 5 ονομάζυμε σιμπλιροματικο παράγοντα τυ πρότυ κλάζματος. Ο σιμπλιροματικος παράγοντας τυ δέφτερυ κλάζματος ίνε ο αριθμος 3.

Ι σιμπλιροματικι παράγοντες στα παραδίγματα αφτα σιμιόθικαν με αριθμυς, πυ τέθικαν πάνο απ' τον αριθμιτι με παρένθεσι απο κάτο.

Για να τρέπσυμε διο κλάζματα σε ομόνιμα, πρέπι:

1) Να βρύμε το ελάχιστο πολαπλάσιο τον παρονομαστόν-τυς.

2) Να βρύμε για κάθε παρονομαστι τον σιμπλιροματικο πολαπλασιαστι, διερόντας τον κινο παρονομαστι τυ δεδομένυ κλάζματος.

3) Να πολαπλασιάσυμε τον αριθμιτι κε παρονομαστι κάθε κλάζματος επι τον σιμπλιροματικο πολαπλασιαστι.

2. Να τραπυν σε ομόνιμα τα κλάζματα: $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{9}{40}, \frac{11}{60}.$

Λίσι. Το ελάχιστο κινο πολαπλάσιο τον παρονομαστον ίτε ο κινος παρονομαστις ίνε το 120.

$$\frac{3}{8}^{(15)}=\frac{45}{120},\quad \frac{5}{12}^{(10)}=\frac{50}{120},\quad \frac{9}{40}^{(3)}=\frac{27}{120},\quad \frac{11}{60}^{(2)}=\frac{22}{120}.$$

§ 11. Ι μεταβολι τυ μεγέθυς τυ κλάζματος απο τιν πρόσθεσι ενος κε τυ αφτυ προσθετέυ στον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος.

1. Ας πάρυμε το κλάζμα $\frac{4}{5}$ κε ας προσθέσυμε στον αριθμιτι κε παρονομαστί-τυ τι μονάδα: θα έχυμε τα κλάζματα:

$$\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9} \text{ κ. τ. λ.}$$

Τα κλάζματα ίνε διατεταγμένα ανάλογα με το μέγεθός-τυς απ'το μικρότερο προς το μεγαλίτερο. Τα κλάζματα αφτα διαφέρυν απο τι μονάδα κατα $\frac{1}{6}$, κατα $\frac{1}{7}$, κατα $\frac{1}{8}$ διλ. ολοένα κατα πιο μικρότερο μέγεθος κε όσο πιο πολι το κλάζμα πλισιάζι προς τι μονάδα, τόσο πιο πολι μεγαλόνι.

Αν εχσετάσυμε τιν αλίθια τυ νόμυ τύτυ πάνο σε άλο κλάζμα, π.χ. στο κλάζμα $\frac{3}{8}$, θα δύμε πος κε δο ο νόμος αφτος ισχίι: $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{10}$ κ.τ.λ. Αφτα τα κλάζματα προσενκίζυν προς τιν μονάδα κε διαφέρυνε απ'αφτιν κατα $\frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{10}$ διλ. ολοένα κε κατα πιο μικρότερο μέγεθος.

2. Ας πάρυμε καταχριστικο κλάζμα π.χ. $\frac{8}{7}$ κι ας μεγαλόσυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαστί-τυ με ένα κε τον αφτο αριθμο· π.χ. τι μονάδα.

Ας σινκρίνυμε τα κλάζματα, πυ βρίκαμε το ένα με τ' άλο κε με τι μονάδα.

$$\frac{8}{7} > \frac{9}{8} > \frac{10}{9} > \frac{11}{10} > \frac{12}{11}.$$

Τα κλάζματα αφτα διαφέρυν απ' τι μονάδα κατα:

$$\frac{1}{7}, \text{ κατα } \frac{1}{8}, \text{ κατα } \frac{1}{9} \text{ κατα } \frac{1}{10}, \text{ κατα } \frac{1}{11}.$$

Εδο ο κλαζματικος αριθμος πλισιάζι στι μονάδα λιγοστέβοντας.

Οταν προσθέτυμε στον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος, πυ δεν ίνε ίσο με τι μονάδα, έναν κε τον αφτον αριθμο, μεταβάλομε το μέγεθος τυ κλάζματος έτσι, όστε το μέγεθος τυ κλάζματος πλισιάζι στι μονάδα. Ετσι αν το κλάζμα ίνε κίριο μεγαλόνι κε αν καταχριστικο μικρένι.

3. Αφτι ι ιδιότιτα τυ κλάζματος μας επιτρέπι να σινκρίνυμε τα κλάζματα, ι αριθμιτες κε παρονομαστες τον οπίον διαφέρυν κατα τον ίδιο αριθμο μονάδον.

Ας σινκρίνυμε τα ακόλυθα κλάζματα κατα το μέγεθός-τυς:

1) $\frac{8}{17}$, κε $\frac{13}{22}$, 2) $\frac{10}{7}$ κε $\frac{14}{11}$.

Λίσι. 1) $\frac{13}{22} > \frac{8}{17}$, επιδι το κλάζμα $\frac{13}{22} = 1 - \frac{9}{22}$, κε το $\frac{8}{17} = 1 - \frac{9}{17}$ ι τελεφτέα διαφορα ίνε λιγότερι.

2) $\frac{10}{7} > \frac{14}{11}$, επιδι $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$ κ $\frac{14}{11} = 1 + \frac{3}{11}$ το τελεφτέο άθριζμα ίνε μικρότερο.

VIII. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΤΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Πρόςθεςι κε αφέρεςι ομόνιμον κλαζμάτον.

Το αςπράδι τυ αβγυ όρνιθας αποτελι τα $\frac{5}{9}$ τυ βάρυς όλυ τυ αβγυ, το βάρος τυ κρόκυ ίνε τα $\frac{3}{9}$ όλυ τυ βάρυς τυ αβγυ. Πόςο μέρος τυ βάρυς απατελι το τςόφλι;

Λίςι. $\frac{5}{9}+\frac{3}{9}=\frac{8}{9}$. Αφτο ίνε το βάρος τυ αςπραδιυ κε κρόκυ.

Ας βρύμε το βάρος τυ τςόφλιυ. $1-\frac{8}{9}=\frac{9}{9}-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$.

Το βάρος τυ τςόφλιυ αποτελι το $\frac{1}{9}$ τυ όλυ βάρυς τυ αβγυ.

Εμις εδο προςθέςαμε κε αφερέςαμε ομόνιμα μέρι: ένατα μερίδια. Κε ςτο αποτέλεςμα βρίκαμε ομόνιμα μερίδια: ένατα.

Στιν περίπτοςι αφτι ι παρονομαςτες τον κλαζμάτον δεν άλαχςαν,

Οταν προςθέτυμε ίτε αφερύμε ομόνιμα κλάζματα προςθέτυμε ίτε αφερύμε τυς αριθμιτες, κε ο παρονομαςτις μένι ο ίδιος.

§ 2. Πρόςθεςι κε αφέρεςι ετερονίμον κλαζμάτον.

1. Ενας χολχόζνικος έκανε ςτο όργομα $\frac{5}{8}$ εργατοιμέρας, ςτο πάςτρεμα τυ ςτάβλυ $\frac{1}{2}$ μέρα, ςτο κυβάλιμα νερυ $\frac{3}{8}$ τις ιμέρας, για νιχτερινι φρύριςι τον μιχανον $\frac{1}{4}$ εργατοιμέρας. Πόςες εργατοιμέρες έκανε ο χολχόζνικος;

Λίςι: $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{14}{8}=$ $=1\frac{6}{8}=1\frac{3}{4}$ εργατοιμέρας.

Στο πρόβλιμα αφτο έχυμε να προςθέςυμε κλάζματα ετερόνιμα. Τιν πρόςθεςι αφτι τι μετατρέπυμε ςε πρόςθεςι ομονίμον κλαζμάτον. Γι' αφτο όλα τα κλάζματα παραςτένυμε ςε όγδοα μερίδια, εποφελύμενι τυς κανόνες τις αναγογις τον κλαζμάτον ςε κινο παρονομαςτι, κε προςθέτυμε τα όγδοα αφτα μέρι.

Οταν προςθέτυμε ίτε αφερύμε ετερόνιμα κλάζματα, πρέπι πρότα να τα τρέψυμε ςε ομόνιμα κε έπιτα προςθέτυμε ίτε αφερύμε τυς αριθμιτες κε παρονομαςτι αφίνομε τον ίδιο.

Ι γραφτι διάταχςι τις πρόςθεςις κε αφέρεςις δίχνετε ςτα ακόλυθα παραδίγματα.

2. Να προςτεθυν τα κλάζματα: $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$.

Λίςι. $\overset{4}{\frac{5}{5}}+\overset{3}{\frac{7}{8}}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{20+21}{24}=\frac{41}{24}=1\frac{17}{24}$.

3. Να γίνι ι αφέρεςι: $\frac{14}{15}-\frac{7}{20}$.

Λίςι. $\overset{4}{\frac{14}{15}}-\overset{3}{\frac{7}{20}}=\frac{56}{60}-\frac{21}{60}=\frac{56-21}{60}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$.

Ι. Σ' αφτα τα παραδίγματα παρονομαςτες ίνε αριθμι, πυ έχυν κινυς παράγοντες.

Για να βρύμε τον κινο παρονομαςτί-τος κατα τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι ανανκαςθίκαμε να βρύμε το ελάχιςτο πολαπλάςιο τον παρονομαςτον όλον τον δοθέντον κλαζμάτον ςίμφονα με το γενικο κανόνα.

ΙΙ. Ι παρονομαςτες τον κλαζμάτον ίνε αριθμι αμιβέα πρότι.

4. Να προςτεθυν τα κλάζματα: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$.

Ο κινος παρονομαςτις ίνε $3 . 5 . 2 = 30$. Αφτος ιςύτε με το γινόμενο όλον τον παρονομαςτον.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{20}{30}+\frac{18}{30}+\frac{15}{30}=\frac{20+18+15}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30},$$

ΙΙΙ. Ενας απο τυς παρονομαςτες διερίτε με όλυς τυς άλυς.

5. Να αφερεθυν $\frac{29}{40}-\frac{5}{8}$.

Ο κινος παρονομαςτις 40, επιδι ο 40 διερίτε δια 40 κε δια 8.

$$\frac{29}{40}-\frac{5}{8}=\frac{29}{40}-\frac{25}{40}=\frac{29-25}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

IV. Οταν προςθέτυμε κε αφερύμε κλάζματα κάποτε μεταχιριζόμαςτε απλυςτεμένυς τρόπυς ςτιν τροπι τον ετερονίμον κλαζμάτον ςε ομόνιμα (όχι ςίμφονα με το γενικο κανόνα) π.χ.

6. $\frac{5}{12}+\frac{1}{8}+\frac{3}{20}=\frac{50}{120}+\frac{15}{120}+\frac{18}{120}=\frac{50+15+18}{120}=\frac{83}{120}$.

Πέρνυμε το μεγαλίτερο παρονομαςτι τον κλαζμάτον, πυ θα προςθέςυμε ίτε θα αφερέςυμε, κε τον πολαπλαςιάζυμε ςινεχος επι τον 2, 3, 4 , 5, κ.τ.λ. κε κάθε φορα δοκιμάζυμε αν το γινόμενο τυ πολαπλαςια-

ζμυ διερίτε δια τον παρανομαςτον τον άλον κλαζμάτον:

20 . 2 = 40 δεν διερίτε δια 12, 20 . 3 = 60 δεν διερίτε δια 8,
20 . 4 = 80 „ „ „ 12, 20 . 5 = 100 „ „ „ 12,
20 . 6 = 120 διερίτε κε δια 12 κε δια 8. Οςτε το 120 θα ίνε ο κινος παρανομαςτις.

V. Οταν έχυμε προφορικα να προςθέςυμε ί κε να αφερέςυμε κλάζματα, ςιχνα ίνε εφκολότερο να βρίςκυμε τον κινο παρονομαςτι με κίνο τον τρόπο, τον οπίον εμις εφαρμόζυμε ςτυς αμιβέα πρότυς αριθμυς.

7. Να προςτεθυν $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{36+40}{96}=\frac{76}{96}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

§ 3. Πρόςθεςι κε αφέρεςι μιχτον αριθμον.

Στα ακόλυθα κλάζματα δίχνετε ι πρόςθεςι κε αφέρεςι μιχτον αριθμον.

1. $3\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=3\frac{7}{9}$.

Εδο ο ένας ο προςθετέος ίνε μιχτος αριθμος κε ο άλος — χίριο κλάζμα. Κατα τιν πρόςθεςί-τυς, προςθέτυν τον κλαζματικο προςθετέο με το κλαζματικο μέρος τυ μιχτυ αριθμυ.

2. $7\frac{3}{8}+2\frac{1}{8}=9+\frac{4}{8}=9\frac{1}{2}$, διότι κατα τιν πρόςθεςι τον κλαζμάτον έχυμε:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Οταν προςθέτυμε δίο μιχτυς αριθμυς, προςθέτυμε χοριςτα τυς ακέρευς κε χοριςτα τυς κλαζματικυς αριθμυς.

3. $5\frac{4}{7}+2\frac{3}{7}=5+2+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}=5+2+1=8$.

Το παράδιγμα δίχνι, πος το άθριζμα τον μιχτον αριθμον μπορί να ίνε ακέρεος αριθμος.

4. $10\frac{7}{15}+3\frac{4}{15}+2\frac{8}{15}=15\frac{19}{15}=16\frac{4}{15}$

$$\frac{7}{15}+\frac{4}{15}+\frac{8}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}.$$

Στο παράδιγμα αφτο φένετε, πος εαν το άθριζμα τον κλαζματικον μερον τον μιχτον αριθμον θα ίνε καταχριςτικο κλάζμα, τότε απο το κλάζμα τότο πρέπι να κσεχορίςυμε τον ακέρεο αριθμο κε να προςθέςυμε αφτον ςτο άθριζμα τον ακέρεον αριθμον.

5. $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+7\frac{1}{2}=12+\frac{7}{8}=12\frac{7}{8}$,όπυ

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{2+1+4}{8}=\frac{7}{8}.$$

Στο παράδιγμα αφτο φένετε ι πρόςθεςι τον μιχτον αριθμον με κλάζματα.

6. $8\frac{5}{11}-3\frac{2}{11}=5\frac{3}{11}$.

Εδο εκςετάζετε περίπτοςι αφέρεςις, όταν κε ο ακέρεος αριθμος κε το κλαζματικο μέρος τυ μιοτέυ ίνε μεγαλίτερο απο το αντίςτιχο μέρος τυ ακέρευ αριθμυ κε τυ κλαζματικυ μέρυς τυ αφερετέυ.

7. $9-3\frac{5}{16}=8+1-3\frac{5}{16}=5\frac{11}{16}$, όπυ $1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$.

Στο παράδιγμα αφτο ίνε ανάνκι να δανιςθύμε μια μονάδα απο τον μιοτέο κε να τιν τρέπςυμε σε καταχριςτικο κλάζμα. Ιςτερα κάνυμε τιν αφέρεςι όπος κε πριν.

8. Να βρεθι ι διαφορα: $6\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}$.

Λ ί ς ι. $6\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}=6\frac{2}{4}-2\frac{3}{4}=5\frac{6}{4}-2\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$.

Εδο το κλαζματικο μέρος τυ μιοτέυ ίνε μικρότερο απο το κλαζματικο μέρος τυ αφερετέυ. Για να κάνυμε τιν αφέρεςι δινατι, δανιζόμαςτε μια μονάδα απο τον ακέρεο αριθμο τυ μιοτέυ κε τιν τρέπυμε σε καταχριςτικο κλάζμα κε ίςτερα κάνυμε τιν αφέρεςι.

Κατα τιν αφέρεςι τον μιχτον αριθμον, βρίςκυμε χοριςτα τι διαφορα τον ακέρεον αριθμον κε χοριςτα τον κλαζματικον μερόν-τυς.

IX. ΕΒΡΕΣΙ ΤΥ ΜΕΡΥΣ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΥ ΚΕ ΤΥ ΑΡΙΘΜΥ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ-ΤΥ.

§ 1. Εβρεςι τυ μέρυς ενος αριθμυ.

Για να λίςυμε προβλίματα τις έβρεςις τον μερον τυ αριθμυ κε τις έβρεςις τυ αριθμυ απο τα μέρι-τυ, αρκι να κσέρυμε τις ιδιότιτες τον κλαζματικον αριθμον.

I. **Ε β ρ ε ς ι ε ν ο ς ο π ι ο δ ί π ο τ ε μ έ ρ υ ς τ υ α ρ ι θ μ υ.** 1. Για τον κανονικο φοτι-

ζμο χριάζετε το εμβαδο τον παραθίρον να αποτελέσι το $\frac{1}{5}$ μέρος τυ εμβαδυ τις κατικίας. Πόςο πρέπι να ίνε το εμβαδο τον παραθίρον τυ δοματίυ, πυ έχι εμβαδο πατόματος 45 **τετ. μ**;

Λ ί ς ι. Πρέπι να βρύμε το $\frac{1}{5}$ τυ 45. Γι' αφτο πρέπι το 45 να διερέςυμε δια 5:

$$\text{το } \frac{1}{5} \text{ τυ 45 ιςύτε } \frac{45}{5} = 9$$

2. Να βρεθι 1) το $\frac{1}{12}$ τυ αριθμυ 60, 2) το $\frac{1}{7}$ τυ 3

Λ ί ς ι 1) το $\frac{1}{12}$ τυ 60 ιςύτε με $\frac{60}{12} = 5$,

2) το $\frac{1}{7}$ τυ 3 ιςύτε με $\frac{3}{7}$.

3. Να βρεθι: 1) το $\frac{1}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ χγ, 2) το $\frac{1}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$.

Λ ί ς ι. Για να βρύμε το $\frac{1}{5}$ τυ αριθμυ, πρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο 5 φορες. Για να ελατόςυμε το κλάζμα 5 φορες, πολαπλαςιάζυμε τον παρονομαςτί-τυ επι 5. Θα έχυμε:

$$1) \text{ το } \frac{1}{5} \text{ τυ } \frac{3}{4} \text{ ιςύτε } \frac{3}{4.5} = \frac{3}{20} \text{ χγ},$$

$$2) \text{ το } \frac{1}{4} \text{ τυ } 2\frac{8}{21} \text{ ιςύτε με το } \frac{1}{4} \text{ τυ } \frac{50}{21} \text{ ιςύτε } \frac{50}{21.4} = \frac{25}{42}.$$

ΙΙ. Εβρεςι τυ αριθμυ, πυ παραςτένι οπιοδίποτε κλάζμα. 4. Για 1 **κιβ. μ.** τίχυ απο τύβλα χριάζοντε 400 τύβλα κε 280 **λ.** αζβέςτινυ ςυβα. Πόςα ιλικα χριάζοντε για να χτίςυμε τίχο $\frac{5}{8}$ **κιβ. μ**;

Λ ί ς ι 1. Ας βρίςκυμε τί ποςο τύβλα χριάζοντε. Για 1 **κιβ. μ.** πρέπι να έχυμε 400 κομάτια τύβλα. Πόςα τύβλα χριάζετε για τίχο $\frac{1}{8}$ **κιβ. μ**;

Πρέπι να έχυμε το $\frac{1}{8}$ τυ όλυ ποςυ.

$$\text{Το } \frac{1}{8} \text{ τυ 400 ιςύτε με } \frac{400}{8}.$$

Τὸρα πρέπι να βρύμε τα $\frac{5}{8}$ τυ 400. Τα $\frac{5}{8}$ θα ίνε 5 φορες περιςότερο απο το $\frac{1}{8}$. Μεγαλόνυμε το κλάζμα $\frac{400}{8}$ 5 φορες. Γι' αφτο αρχι να πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτι τυ κλάζματος επι 5.

$$\text{Τα } \frac{5}{8} \text{ τυ 400 ιςύντε } \frac{400.5}{8} = 50.5 = 250.$$

Χριάζοντε 250 κομάτια τύβλα.

2. Ετςι βρίςκυμε κε τα $\frac{5}{8}$ τυ 280 λ, διλ. τυ ποςυ τυ χριαζόμενυ ςυβα.

$$\text{Το } \frac{1}{8} \text{ τυ 280 ιςύτε με } \frac{280}{8},$$

$$\text{τα } \frac{5}{8} \text{ τυ 280 ιςύντε με } \frac{280.5}{8} = 35.5 = 175 \text{ λ}.$$

5. Να βρεθυν: 1) τα $\frac{3}{8}$ τυ 50, 2) τα $\frac{5}{6}$ τυ $\frac{3}{4}$,

3) το $\frac{1}{4}$ τυ $2\frac{2}{21}$.

Λ ί ς ι. 1) το $\frac{1}{8}$ τυ 50 αποτελι $\frac{50}{8}$,

$$\text{τα } \frac{3}{8} \text{ τυ 50 } „ „ \frac{50.3}{8} = \frac{25.3}{4} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4},$$

$$2) \text{ το } \frac{1}{6} \text{ τυ } \frac{3}{4} \text{ αποτελι } \frac{3}{4.6} = \frac{1}{4.2} = \frac{1}{8},$$

$$\text{τα } \frac{5}{6} \text{ τυ } \frac{3}{4} \text{ ιςύντε } \frac{3.5}{4.6} = \frac{5}{4.2} = \frac{5}{8},$$

3) το $\frac{1}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$ ιςύτε με $\frac{1}{4}$ τυ $\frac{50}{21}, = \frac{50}{21 \cdot 4} =$

$= \frac{25}{21 \cdot 2} = \frac{25}{42},$

τα $\frac{3}{4}$ τυ $2\frac{8}{21}$ αποτελύνε $\frac{50 \cdot 3}{21 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 1}{7 \cdot 2} =$

$= \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14}$

Για να βρύμε το μέρος ενος αριθμυ, πρέπι τον δεδομένο αριθμο να ελατόςυμε τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο παρονομαςτις τυ κλάζματος, πυ παραςτένι το ζιτύμενο μέρος τυ ακέρευ. Το εκςαγόμενο, πυ βρίςκομε πρέπι να το μεγαλόςυμε τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο αριθμιτις τυ ίδιυ κλάζματος.

§ 2. Εβρεςι τυ αριθμυ απο το μέρος-τυ.

Μάθαμε να λίςυμε προβλίματα όταν θέλυμε να βρίςκυμε το μέρος ενος αριθμυ. Θα μάθυμε τόρα να λίνυμε αντίθετα προβλίματα — όταν θέλυμε να βρύμε τον ολάκερο αριθμο απο το μέρος-τυ.

1. Στα ςιςτατικα ιδιχυ ατςαλιυ περιέχετε $\frac{1}{25}$ τυ μέρυς-τυ απο νίκελο. Να βρεθι το βάρος τυ ατςαλιυ, για τιν καταςκεβι τυ οπίυ χςοδέφτικαν 20 χγ. νίκελο.

Λ ί ς ι. Ας ςιμιόςυμε με το γράμα x το άγνοςτο βάρος τυ ατςαλιυ. Το νίκελο αποτελι το $\frac{1}{25}$ αφτυ τυ αριθμυ. Το $\frac{1}{25}$ τυ άγνοςτυ x ας παραςτ ίνυμε έτςι: $\frac{1}{25}x$.

Ας γράπςυμε με τον τίπο το πρόβλιμα: $\frac{1}{25}x = 20$ χγ.

Ολο το x φένετε, πος θα ίνε 25 φορες μεγαλίτερο παρα το $\frac{1}{25}x$.

$$x = \frac{25}{25}x \text{ χγ}, \; x = 20 \cdot 25 = 500 \text{ χγ}.$$

Πιο ςίντομι γραφι τις λίςις θάνε ι ακόλυθι:

$$\frac{1}{25}x = 20, \; x = 20 \cdot 25 = 500 \text{ χγ}.$$

Στο πρόβλιμα αφτο το γνοςτο μέρος έχι παρασταθι ςε ακέρεα χιλιόγραμα.

Ας λίςυμε άλο πρόβλιμα, ςτο οπίο το μέρος, πυ μας δόθικε θα ίνε κλαζματικος αριθμος.

2. Σιδερένιο δοκάρι μάκρος $\frac{1}{5}$ μ ζιγίζι $\frac{3}{4}$ χγ. Πόςο ζιγίζι 1 μ. παρόμιο δοκάρι;

Λ ί ς ι. $\frac{1}{5}x = \frac{3}{4}$ χγ. $x \quad \frac{5}{5}x, \; x = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$ χγ $= 3\frac{3}{4}$ χγ.

§ 3. Εβρεςι τυ αριθμυ, τυ οπίυ το γνοςτο μέρος-τυ ίνε οπιοδίποτε κλάζμα.

1. Ενα κολχοζ έχι 2 τράκτορ. Τράκτορ μικρις δίναμις οργόνι ςτο μερονίχτι 250 a τυ χοραφιυ, πυ ίτανε χορτοτόπι. Αφτο αποτελι τα $\frac{5}{12}$ εκίνυ τυ ποςυ, το οπίο μπορι να οργόςι πιο μεγαλίτερις δίναμις τράκτορ. Πόςι ιμερίςια εργαςία μπορι να εκτελέςι το πιο μεγαλίτερις δίναμις τρακτορ;

Λ ί ς ι. Ας παραδεχτύμε πος ι εργαςία πυ χάνι το πιο μεγάλις δίναμις τράκτορ ςτο μερόνιχτο, ίνε ο ζιτύμενος αριθμος. Ι εργαςία πυ χάνι το μικρο τράκτορ αποτελι μονάχα ένα μέρος τις εργαςίας τις πιο μεγαλίτερις δίναμις τράκτορ. Κςέροντας το μέρος τύτο, πρέπι να βρύμε τιν άγνοςτι εργαςία τυ δινατότερυ τράκτορ. Ας ςιμιόςυμε τιν άγνοςτι ςε μας εργαςία με το x κε ας βρύμε ένα μέρος αφτυ τυ αγνόςτυ x.

Θα γράπςυμε τι λίςι ος εκςις:

τα $\frac{5}{12}$ τυ άγνοςτυ x ςιμιόνυμε: $\frac{5}{12}x$,

το $\frac{1}{12}$ » » » » $\frac{1}{12}x$.

Κε έτςι τα $\frac{5}{12}x$ αποτελυν 250 a, το $\frac{1}{12}x$ ίνε κατα 5 φορες λιγότερο δ λ. 50 a. Γράφομε λιπον: $\frac{1}{12}x = 50\,a$. Ολι ι εργαςία τυ πιο μεγαλίτερις δίναμις τράκτορ ίνε όλο το x, 12 φορες περιςότερι απο το δοδέκατο μέρος-τις:

Ας βρύμε λιπον το x.

$$x = 50 \cdot 12 = 600\,a = 6 \text{ εχτ}.$$

Τι γραφτι λίςι πρέπι να κάνυμε πιο ςίντομα:

$$\frac{5}{12}x=250,\ \frac{1}{12}x=\frac{250}{5},\ x=\frac{250.12}{5}=600\ a=6\ \text{εχτ.}$$

2. Να βρεθι το x εαν ίνε γνοςτο πος το $\frac{3}{16}x=\frac{4}{5}$ εχτ.

Λ ί ς ι. $\frac{1}{16}x$ ίνε 3 φορες μικρότερο παρα το $\frac{3}{16}x$,

$$\frac{1}{16}x=\frac{4}{5.3},\ x=\frac{16}{16}x=\frac{4}{5.3}.16=\frac{4.16}{5.3}=$$

$$=\frac{64}{15}\ \text{εχτ.}=4\frac{4}{15}\ \text{εχτ.}$$

Για να βρεθι ο ακέρεος, όταν δίνετε ο αριθμος, πυ αντιςτιχι με ένα μέρος αφτυ τυ ακέρευ, κε δίνετε το κλάζμα, πυ δίχνι, τί μέρος τυ ακερέυ αποτελι ο δεδομένος αριθμος, πρέπι τον δεδομένο αριθμο να ελατόςυμε τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο αριθμιτις τυ κλάζματος, πυ παραςτένι μέρος τυ ακερέυ. Το εκςαγόμενο, πυ βρίςκυμε, πρέπι να το μεγαλόςυμε τόςες φορες, όςες μονάδες περιέχι ο παρονομαςτις τυ ίδιυ κλάζματος.

Χ. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Πολαπλαςιαζμος κλάζματος επι ακέρεο αριθμο.

1. Ενα αφτοκίνιτο κςοδέβι τα $\frac{4}{5}$ χγ βενζίνις για να διατρέχςι 1 χμ.

Πόςα χιλιόγραμα βενζίνις χριάζετε αν έχι να διατρέχςι 6 χμ.

Λ ί ς ι. Σε 1 χμ δρόμο χριάζοντε $\frac{4}{5}$ χγ, ςτο άλο κςανα $\frac{4}{5}$, επίςις ςτο τρίτο, ςτο τέταρτο, ςτο πέμτο κε ςτο έχτο χιλιόμετρο θα χριαςθι απο $\frac{4}{5}$ χγ.

Το όλο χριάζυντε: $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$,

ίτε $4\frac{4}{5}$ χγ.

Εμις αναννκαζόμαςτε τον κλαζματικο αριθμο $\frac{4}{5}$ να επαναλάβυμε 6 φορες ος προςθετέο, ίτε να αφκςίςυμε τον κλαζματικο αριθμο $\frac{4}{5}$ 6 φορες, πυ ίνε ένα κε το αφτο. Ο πολαπλαςιαζμος γράφετε πιο ςίντομα:

$$\frac{4}{5}\cdot 6=\frac{24}{5}.$$

Εχυμε περίπτοςι πολαπλαςιαζμυ κλάζματος επι ακέρεο αριθμο.

Για να πολαπλαςιάςυμε κλάζμα επι ακέρεο αριθμο, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον αριθμιτι επι τον ακέρεο αριθμο, κε το εβριςκόμενο γινόμενο να διερέςυμε δια τυ παρονομαςτι.

Ας γράπςυμε τον κανόνα αφτο με γράματα: $\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a.m}{b}$.

2. Ας λίςυμε τα παραδίγματα: 1) $\frac{1}{7}\cdot 7$, 2) $\frac{4}{7}\cdot 7$.

Λ ί ς ι. 1) $\frac{1}{7}\cdot 7=1$.

Ο πολαπλαςιαζμος αφτος δε χριάζετε ιδιέτερες επεκςιγίςις. Διερόντας τι μονάδα ςε 7 μέρι κε έπιτα επαναλαμβάνοντες κάθε μέρος 7 φορες, εχτελύμε διο αμιδέα αντίθετες πράκςις κε κςανα βρίςκυμε τι μονάδα.

2) $\frac{4}{7}\cdot 7=4$.

Διερόντας το 4 δια τυ 7 κε πολαπλαςιάζοντας το εβριςκόμενο επίςις επι 7 κςανα βρίςκυμε τον αριθμο 4.

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι. Οταν έχυμε να πολαπλαςιάςυμε κλαζματικο αριθμο επι ακέρεο ίςον με τον παρονομαςτι τυ κλάζματος, ςτο γινόμενο βρίςκυμε αριθμο, ίςον με τον αριθμιτι τυ κλάζματος. Σε παρόμιες περιπτόςις πρέπι να ιποδίχςυμε το αποτέλεζμα αμέςος.

3. Ενα αφτοκίνιτο διατρέχι $10\frac{1}{2}$ μ ςτο δεφτερόλεπτο. Πόςι απόςταςι διατρέχι ςε 1 λεπτο;

Για να λίςυμε το πρόβλιμα πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον μιχτο επι τον ακέρεο. Τον πολαπλαςιαζμο αφτο μπορύμε να κάνυμε με διο τρόπυς.

1) $10\frac{1}{2}\cdot 60 = 10.60 + \frac{1}{2}\cdot 60 = 600 + \frac{60.1}{2} = 600 + \frac{60}{2} = 600 +$

$+ 30 = 630$ μ στο λεπτο.

Εδο εμις πολαπλασιάζυμε επι 60 χοριστα τον ακέρεο αριθμο κε χοριστα τον κλαζματικο αριθμο.

2) $10\frac{1}{2}\cdot 60 = \frac{21}{2}\cdot 60 = 21.30 = 630$ μ στο λεπτο.

Στιν τελεφτέα λίσι εμις, προ τυ πολαπλασιαζμυ, τρέψαμε τον μιχτο αριθμο σε καταχριστικο κλάζμα κε πολαπλασιάσαμε αφτο επι τον ακέρεο.

4. Ας κάνυμε άλο παράδιγμα: $\frac{7}{20}\cdot 4 = \frac{7.4}{20}$.

Για να βρύμε τελιοτικα το αποτέλεζμα στο παράδιγμα αφτο πρέπι να κάνυμε απλοπίισι, διλ. να διερέσυμε τυς όρυς τυ κλάζματος δια 4:

$$\frac{7}{20}\cdot 4 = \frac{7.4}{20} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

§ 2. Πια προβλίματα λίνυν με τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα.

Πολαπλασιαζμος επι ακέρεο αριθμο ίνε απλοπιιμένι πρόσθεσι.

Πολαπλασιάζοντας επι ακέρεο αριθμο, αφξένυμε τον δοθέντα αριθμο τόσες φορες, όσες μονάδες περιέχι ο πολαπλασιαστις.

Ας εξετάσυμε τόρα, πια σιμασία έχι ο πολαπλασιαζμος επι κλάζμα.

1. Ενα μέτρο σιδερένιας τενίας ζιγίζι 12 χγ. Πόσο ζιγίζυν: 1) 2 μ, 2) 5 μ, 3) $\frac{1}{4}$ μ, 4) $2\frac{1}{2}$ μ;

Λίσι. Ι παράστασι τυ πολαπλασιαζμυ με γράματα ίνε: $ab = q$, όπυ a κε b ίνε παράγοντες, q ίνε γινόμενο. Ας λίσυμε το πρόβλιμα αντικαθιστόντας τα γράματα με αριθμυς. Στιν παράστασι πρέπι να αντικαταστίσυμε το a με αριθμο, πυ να σιμένι το βάρος 1 μ. σίδερυ, στι θέσι τυ b πρέπι να βάλυμε τον αριθμο, πυ να δίχνι πόσα μέτρα έχι ι τενία. Το γινόμενο δίνι το βάρος τις τενίας.

1) $12.b = 12.2 =$, 3) $12.b = 12.\frac{1}{4} =$,

2) $12.b = 12.5 =$, 4) $12.b = 12.2\frac{1}{2} =$,

Σ' όλες αφτες τις περιπτόσις μας δόθικε το βάρος ολάκερυ τυ μέτρυ, κε ζιτύσαμε το βάρος τενίας, το μάκρος τις οπίας έχι διαφορα απο το ολάκερο μέτρο. Το μάκρος αφτο μπορι να ίνε περισότερο τυ ενος μέτρυ ίτε να αποτελι ένα μέρος-τυ.

Θα ίταν άσκοπο στι λίσι τυ προβλίματος 1 να κάνυμε πολαπλασιαζμο κε στι λίσι τον άλον περιπτόσεον να σκεφτύμε να κάνυμε άλι πράξι. Γι' αφτο κάθε φορα, όταν μας δίνετε ολάκερο, κε πρέπι να βρύμε ποσο μεγαλίτερο τυ ολάκερυ ίτε να αποτελι μέρος αφτυ, θα χρισιμοπιίσυμε τον πολαπλασιαζμο. Ετσι ο πολαπλασιαζμος επι κλάζμα, μας οδιγι στιν έβρεσι τον μερον τυ ολάκερυ.

Ας λίσυμε προβλίματα για όλες τις παραπάνο περιπτόσις.

1) $12.2 = 24$, 2) $12.5 = 60$.

Αφτες ι λίσις δεν χριάζοντε επεξιγίσις.

3) Το βάρος $\frac{1}{4}$ μ αποτελι $\frac{1}{4}$ τυ 12 χγ. Ας βρύμε το $\frac{1}{4}$ τυ 12 χγ· το $\frac{1}{4}$ τυ 12 ίνε 3 χγ. Παραπάνο ίπαμε πος το πρόβλιμα λίνετε με τον πολαπλασιαζμο τυ 12 επι τον $\frac{1}{4}$ διλ. $12\cdot\frac{1}{4} = 3$.

4) Να πολαπλασιάσυμε το 12 επι $2\frac{1}{2}$. Αφτο σιμένι το 12 να το επαναλάβυμε 2 φορες κε να προσθέσυμε ακόμα κε το μισο τυ 12.

$12.2 = 24$, $12.\frac{1}{2} = 6$, $12.2\frac{1}{2} = 24+6 = 30$.

Αλος τρόπος. Ας τρέψυμε τον $2\frac{1}{2}$ σε καταχριστικο κλάζμα κε ας πολαπλασιάσυμε: $12.\frac{5}{2} = \frac{12.5}{2} = 30$

Με τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα βρίσκυμε ένα ίτε κάμποσα μέρι τυ πολαπλασιαστέυ.

§ 3. Πολαπλασιαζμος επι κλάζμα.

Επιδι τον πολαπλασιαζμο επι κλαζματικο αριθμο κάναμε έτσι, όπος τιν έβρεσι τυ μέρυς τυ ακέρευ, γι' αφτο χορις δισκολία μπορύμε να διατιπόσυμε τον κανόνα τις έβρεσις τυ γινομένυ κατα τον πολαπλασιαζμο επι κλάζμα.

I. Πολαπλαςιαζμος κλάζματος επι κλάζμα. 1. Να πολαπλαςιαςθυν το $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$.

Λ ί ς ι. Βρίςκυμε τα $\frac{2}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$.

1) το $\frac{1}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ θα ίνε $\frac{3}{4.5}$, 2) τα $\frac{2}{5}$ τυ $\frac{3}{4}$ θα ίνε $\frac{3.2}{4.5}$.

Οςτε: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3.2}{4.5}$

Για να πολαπλαςιάςυμε κλάζμα επι κλάζμα, πρέπι το γινόμενο τον αριθμιτον να διερέςυμε δια το γινόμενο τον παρονομαςτον.

Με γράματα θάχυμε: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$

II. Ενας απ' τυς παράγοντες ίνε ακέρεος ίτε μιχτος αριθμος.

2. Να πολαπλαςιαςτι το γινόμενο τυ $3\frac{1}{8}\cdot 10$.

Λ ί ς ι. $3\frac{1}{8}\cdot 10=\frac{25}{8}\cdot 10=\frac{25.10}{8}=\frac{25.5}{4}=\frac{125}{4}=31\frac{1}{4}$.

Στιν περίπτοςι αφτι μετατρέψαμε τον μιχτο ςε καταχριςτικο κλάζμα κε πολαπλαςιάςαμε το κλάζμα αφτο επι τον ακέρεο.

Θα μπορύςαμε να διεξάγυμε τον πολαπλαςιαζμο κι αλιος:

$$3\frac{1}{8}\cdot 10=\left(3+\frac{1}{8}\right)\cdot 10=3.10+\frac{1}{8}\cdot 10=30+\frac{10}{8}=$$
$$=30+1\frac{2}{8}=31\frac{1}{4}.$$

3. Να γίνι ο πολαπλαςιαζμος: $4\cdot\frac{3}{5}$.

Λ ί ς ι. $4\cdot\frac{3}{5}=\frac{4.3}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$.

Εδο ξανα θεορύμε τον πολαπλαςιαζμο επι κλάζμα, ος έβρεςι τυ μέρυς τυ ακέρευ κε γι' αφτο πολαπλαςιάζυμε τον ακέρεο επι τον αριθμιτι τυ δεδομένυ κλάζματος κε το γινόμενο διερύμε δια τυ παρονομαςτι τυ ίδιυ κλάζματος.

Παραβάλοντας αφτο το γινόμενο με το γινόμενο

$\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{3.4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$,

θα δύμε, πος τα γινόμενα αφτα ίνε ίςα διλ. κατα τον πολαπλαςιαζμο ακέρευ αριθμυ επι κλάζμα, μπορύμε να αλάξυμε τι ςιρα τον παραγόντον.

4. Να πολαπλαςιαςτυν $5\cdot 2\frac{2}{3}$.

Λ ί ς ι. $5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5.8}{3}=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

III. Κε ι διο παράγοντες ίνε μιχτι αριθμι.

5. Να πολαπλαςιαςτυν $4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{8}{27}$.

Λ ί ς ι. $4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{8}{27}=\frac{9}{2}\cdot\frac{35}{27}=\frac{9.35}{2.27}=\frac{35}{2.3}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$.

Για να πολαπλαςιάςυμε μιχτυς αριθμυς πρέπι να τρέψυμε καθέναν απ'αφτυς ςε καταχριςτικο κλάζμα.

IV. Πολαπλαςιαζμος κλάζματος επι αριθμο, ίςον με τον παρονομαςτι.

6. $\frac{5}{9}\cdot 9=\frac{5.9}{9}=5$. 7. $\frac{3}{14}\cdot 14=3$.

Οταν πολαπλαςιάζυμε κλάζμα επι αριθμο ίςο με τον παρονομαςτι, βρίςκυμε αριθμο ίςον με τον αριθμιτι.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ας ςινκρίνυμε τα γινόμενα:

1) $18.3=54$, 4) $18\cdot\frac{1}{2}=9$,

2) $18.2=36$, 5) $18\cdot\frac{1}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$,

3) $18.1=18$, 6) $18\cdot\frac{2}{15}=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$.

Βλέπυμε, πος το αποτέλεζμα ςτα δίο πρότα παραδίγματα ίνε μεγαλίτερο απο τον πολαπλαςιαςτέο, ςτο τρίτο ίνε ίςο με τον πολαπλαςιαςτέο, κε ςτα επίλιπα ίνε μικρότερο τυ πολαπλαςιαςτέυ.

Οςτε, κατα τον πολαπλαςιαζμο, επι κίριο κλάζμα το γινόμενο θάνε μικρότερο απο τον πολαπλαςιαςτέο. Γι'αφτο δεν πρέπι να νομίζυμε ότι πολαπλαςιαζμος ςιμένι πάντα ά φ ξ ι ς ι.

Ο αριθμος αφξένι μονάχα, όταν πολαπλαςιάζυμε επι πολαπλαςιαςτέο μεγαλίτερο τις μονάδας, ενο απο τον πολαπλαςιαζμο επι κίριο κλάζμα ο αριθμος ελατόνετε.

XI. ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

§ 1. Αμιβέα αντίςτροφι αριθμι.

Οριζμος. **Διο αριθμι ονομάζυντε αμιβέα αντίςτροφι, αν δίνυν γινόμενο τι μονάδα.**

1. Να βρεθυν ι αντίςτροφι αριθμι τον:

$$7,\ 2,\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{10}.$$

Λίςι. Ο αντίςτροφος αριθμος τυ 7 ίνε το $\frac{1}{7}$, επιδι $7\cdot\frac{1}{7}=1$.

Ο αντίςτροφος αριθμος τυ 2 ίνε το $\frac{1}{2}$, επιδι $2\ .\ \frac{1}{2}=1$.

» » » τυ $\frac{1}{4}$ » » 4 » $\frac{1}{4}\ .\ 4=1$.

» » » τυ $\frac{5}{8}$ » » $\frac{8}{5}$ » $\frac{8}{5}\ .\ \frac{5}{8}=1$.

Αν μας δίνετε ένας οποιοςδίποτε αριθμος n, τότε τον αντίςτροφό-τυ αριθμο, πρέπι να ςιμιόςυμε: $\frac{1}{n}$. Για το κλάζμα $\frac{a}{b}$ αντίςτροφος αριθμος θάνε $\frac{b}{a}$.

§ 2. Διέρεςι δια κλάζματος.

Διέρεςι ίνε πράχςι αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο. Με τι διέρεςι, απο το γινόμενο τον δίο παραγόντον κε ενος παράγοντα βρίςκυν τον άλο παράγοντα. Ετςι εαν το δομένο γινόμενο ίνε 80 κε ένας παράγοντας 40, τότε με τι διέρεςι θα βρύμε, πος ο δέφτερος παράγοντας θα ίνε το 2.

Με τον ίδιο τρόπο βρίςκυμε με τι διέρεςι τον δέφτερο παράγοντα κε τότε, όταν ο πρότος παράγοντας παραςτένι κλάζμα.

1. $9:\frac{3}{4}=;$

Διερετέος (διλ. το γινόμενο) ιςύτε με 9, ο ένας παράγοντας (διερέτις) με $\frac{3}{4}$, ο άλος παράγοντας (πιλικο) πρέπι να βρεθι. Αν τον παραςτίςυμε με το γράμα x τότε θα έχυμε:

$$9:\frac{3}{4}=x,\quad \frac{3}{4}x=9,\quad \frac{1}{4}x=\frac{9}{3}=3,\quad \frac{4}{4}x=3\ .\ 4=12.$$

Το πρόβλιμα καταλίγι ςε γνοςτο άλο πρόβλιμα, ςτιν έβρεςι ακέρευ απο τα μέρι-τυ.

Απο τιν άλι μερια αφτος ο άγνοςτος παράγοντας x ίνε πιλίκο τις διέρεςις τυ 9 δια $\frac{3}{4}$, διλ. $9:\frac{3}{4}$. Οςτε, βρίςκοντας τον αριθμο 12 απο

τυς αριθμυς 9 κε $\frac{3}{4}$, καταλίγυμε ςτο πιλίκο τις διέρεςις 9 δια $\frac{3}{4}$, $9:\frac{3}{4}=12$, μ'άλα λόγια το πρόβλιμα τις διέρεςις δια κλάζματος μας έφερε ςτιν έβρεςι τυ ακέρευ απο τα μέρι-τυ.

Ας κάνυμε κε άλο παράδιγμα διέρεςις.

2. Να βρεθι ο άγνοςτος παράγοντας απο το γινόμενο κε το γνοςτο παράγοντα. Το γινόμενο $\frac{3}{2}$. Ο άγνοςτος παράγοντας $\frac{5}{9}$.

Λίςι. Αν παραςτίςυμε τον άγνοςτο παράγοντα με το γράμα x. Θάχυμε:

$$\frac{5}{9}.x=\frac{3}{2}.$$

Ζιτόντας να βρύμε το όλο, απο το μέρος, βρίςκυμε:

$$x=\frac{3\ .\ 9}{2\ .\ 5}=\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}.$$

Δίνοντας το παράδιγμα αφτο, εχτελέςαμε κε πάλι διέρεςι επιδι βρίκαμε τον άγνοςτο παράγοντα x, κςέροντας το γινόμενο $\frac{3}{2}$ κε τον άλον παράγοντα $\frac{5}{9}$.

Γραφι τις λίςις: $\frac{3}{2}:\frac{5}{9}=\frac{3\ .\ 9}{2\ .\ 5}=\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}$.

Ζιτόντας τον ακέρεο απο το μέρος-τυ, βρίςκυμε τον άγνοςτο παράγοντα απο το γινόμενο κε τον γνοςτο κλαζματικο παράγοντα, κάνυμε πράχςι διλ. αντίςτροφι με τον πολαπλαςιαζμο, διέρεςι. Στα παραδίγματά-μας, αφτο ίτανε διέρεςι δια κλάζματος.

3. Να βρεθι το x εαν $\frac{3}{4}x=\frac{15}{2}$.

Λίςι. Για να βρύμε το x πρέπι να κάνυμε διέρεςι:

$$x=\frac{15}{2}:\frac{3}{4},$$

ίτε ςαν να πύμε να βρεθι το x απο τα μέρι-τυ. Ι τελεφτέα πράχςι δίνι:

$$x=\frac{15\ .\ 4}{2\ .\ 3}=10.$$

Αντις να διερέςυμε τον $\frac{15}{2}$ δια $\frac{3}{4}$, εκτελύμε πολαπλαςιαζμο $\frac{15}{2}\cdot\frac{4}{3}$ ο πολαπλαςιαζμος δίνι το ίδιο εχςαγόμενο:

$$\frac{15}{2}\cdot\frac{4}{3}=10.$$

Σ ι μ ί ο ς ι. Ι διέρεςι δια κλάζματος κε ο πολαπλαςιαζμος επι κλάζμα αντίςτροφο τυ διερέτι, δίνυν τα ίδια αποτελέζματα.

4. Να γίνι ι διέρεςι $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}$.

Λ ί ς ι. $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=x,\quad \frac{5}{7}x=\frac{3}{4},\quad x=\frac{3.7}{4.5}.$

Εαν αντικαςτίςυμε τι διέρεςι με πολαπλαςιαζμο επι κλάζμα, αντίςτροφο με το διερέτι θα έχυμε: $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3.7}{4.5}$. Ι απάντιςι ίνε ι ίδια.

Για να διερέςυμε έναν οπιοδίποτε αριθμο, δια κλάζματος πρέπι να τον πολαπλαςιάςυμε επι αριθμο, πυ να ίνε αντίςτροφος με τον διερέτι.

Γραφι με τα γράματα: $\frac{a}{b}:\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{q}{p}=\frac{a.q}{b.p}.$

§ 3. Διέρεςι οπιοδίποτε ακέρεον κε κλαζματικον αριθμον.

1. Να βρεθι το πιλίκο $\frac{12}{49}:\frac{4}{7}$.

Λ ί ς ι. $\frac{12}{49}:\frac{4}{7}=\frac{12}{49}\cdot\frac{7}{4}=\frac{12.7}{49.4}=\frac{3}{7}.$

2. Να βρεθι το πιλίκο: $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3.1}{4.6}=\frac{1}{8}.$

3. Να βρεθι το πιλίκο: $6:\frac{3}{4}=6.\frac{4}{3}=8.$

4. Να βρεθι το πιλίκο: $8\frac{1}{3}:1\frac{3}{4}.$

Λ ί ς ι. Εδο έχυμε περίπτοςι διέρεςις μιχτον αριθμον. Προτυ να αρχίςυμε τι διέρεςι, πρέπι να τρέπςυμε τον διερετέο κε τον διερέτι ςε καταχριςτικα κλάζματα:

$$8\frac{1}{3}:1\frac{3}{4}=\frac{25}{3}:\frac{7}{4}=\frac{25.4}{3.7}=\frac{100}{21}=4\frac{16}{21}.$$

5. Να βρεθι $\frac{2}{5}:\frac{3}{5}$.

Λ ί ς ι. $\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=\frac{2.5}{5.3}=\frac{2}{3}.$

Στο τελεφτέο παράδιγμα διερèςαμε κλάζματα ομόνιμα. Το ίδιο εβριςκόμενο θα έχυμε αν διερέςυμε αμέςος τυς αριθμιτες, χορις να πάρυμε ιπ' όπςιν τυς ίςυς παρανομαςτες.

I. Οταν έχυμε να διερέςυμε μιχτυς αριθμυς ίνε ανάνκι τυς μιχτυς αριθμυς, να τρέπςυμε ςε καταχριςτικα κλάζματα.

II. Οταν έχυμε να διερέςυμε διο ομόνιμα κλάζματα πρέπι να διερέςυμε μονάχα τυς αριθμιτες απορίπτοντας τυς παρονομαςτες αφτον τον κλαζμάτον.

III. Οταν έχυμε να διερέςυμε κλάζμα δι' ακερέυ αριθμυ, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον ακέρεο επι τον παρονομαςτι τυ κλάζματος χορις να αλάκςυμε τον αριθμιτι.

Σ ι μ ί ο ς ι. Πάντα πρέπι να κάνυμε απλοπίιςι ςτο εβριςκόμενο κλάζμα κε ίςτερα να πολαπλαςιάςυμε.

6. $\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{12.5}{25.4}=\frac{3.1}{5.1}=\frac{3}{5}.$

7. $\frac{8}{9}:\frac{4}{3}=\frac{8.3}{9.4}\quad\frac{2.1}{3.1}=\frac{2}{3}.$

§ 4. Προβλίματα, πυ λίνοντε με τι διέρεςι.

Σιχνα χάναμε διέρεςι κατα τι λίςι διαφòρον προβλιμάτον. Μα μονàχα τόρα, όταν μάθαμε να διερύμε κλάζματα, μπορύμε να ιποδίκςυμε όλες τις περιπτόςις, ςτις οπìες χριςιμοπιύμε τι διέρεςι, όταν έχυμε να λίςυμε προβλίματα.

Ενα απο τα κιριότερα προβλίματα, πυ λίνυντε με διέρεςι, ίνε κε το πρòβλιμα τις έβρεςις εκίνυ τυ αριθμυ, τον οπίον παραδέχοντε για ακέρεο, ςίμφονα με τον δεδομένον αριθμο, πυ ίνε μεγαλίτερος ί μικρότερος τυ ακερέυ.

Ι έβρεςι τυ ακέρευ απο το δεδομένο μέρος-τυ λίνετε με τι διέρεςι.

Ας απαριθμίςυμε τόρα όλα τα προβλίματα τα οπία λίνυμε με τι διέρεςι.

1. Απ'το γινόμενο διο παραγόντον κε ενος απ' αφτυς να βρεθι ο άλος παράγοντας.

2. Να διερεθι ο αριθμος ςε χάμποςα ίςα μέρι (διέρεςι δια ακέρευ).

3. Να βρεθι ο ακέρεος όταν δίνετε ένα μέρος-τυ κε ο αριθμος.

4. Να ςινκριθυν δίο αριθμι. Να μάθυμε κατα πόςες φορες ο ένας αριθμος ίνε μεγαλίτερος ίτε μικρότερος τυ άλυ, ίτε πιο μέρος ενος αριθμυ αποτελι ο άλος αριθμος (να βρùμε το λόγο τον αριθμον).

Ας σταματίσυμε ακόμα στο τελεφτέο ζίτιμα.

1. Θέλυμε να μάθυμε, πιο μέρος τυ 30 αποτέλι το 5.

Το πρόβλιμα μπορύμε να λίσυμε έτσι: ας μάθυμε, πόσες φορες το 5 περιέχετε στο 30, για τύτο διερύμε το 30 δια τυ 5 κε βρίσκυμε το αποτέλεζμα 6 φορες.

Αποδο σινάγυμε, πος το 5 αποτελι το $\frac{1}{6}$ τυ 30.

Το ίδιο πρόβλιμα μπορύμε να λίσυμε με τι διέρεσι τυ 5 δια 30 κε θα έχυμε:

$$5 : 30 = \frac{1}{6}.$$

2. Ενα αφτοκίνιτο μπορι να κυβαλίσι $1\frac{1}{2}$ τ. φορτίο. Μα κυβαλάι μονάχα $1\frac{1}{4}$ τ. Πόσο μέρος τις ολικις φορτοτικίς-τυ δίναμις πίρε το αφτοκίνιτο;

Λ ί σ ι. Το πρόβλιμα λίνετε με τι διέρεσι:

$$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} = \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 2}{4 . 3} = \frac{5}{6}.$$

Πρέπι να κάνυμε ακόμα μια σπυδέα παρατίρισι για τι λίσι τον προβλιμάτον με τι βοίθια τις διέρεσις. Ας εξετάσυμε όμος προτίτερα δίο παραδίγματα.

3. Για $4\frac{1}{2}$ χγ ζάχαρι πλιρόσανε $7\frac{7}{8}$ ρύβ. Πόσο αξίζι το χιλιόγραμο;

Λ ί σ ι. $7\frac{7}{8} : 4\frac{1}{2} = \frac{63}{8} : \frac{9}{2} = \frac{63 . 2}{8 . 9} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ τυ ρυβλίυ.

Εδο το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ.

4. Για $\frac{3}{4}$ μ λαστιχένιυ σολίνα πλιρόσανε $1\frac{1}{2}$ ρύβ. Πόσο αξίζι 1 μ τυ σολίνα τύτυ;

Λ ί σ ι. $1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} = 2$ ρύβλια.

Εδο το πιλίκο ίνε μεγαλίτερο τυ διερετέυ.

5. Ας σινκρίνυμε αναμεταξύ-τυς τα ακόλυθα πιλίκα:

$12 : 3 = 4$ (το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ),

$11 : 1 = 12$ (το πιλίκο ίνε ίσο με τον διερετέο),

$12 : \frac{1}{2} = 24$ (το πιλίκο ίνε μεγαλίτερο τυ διερετέυ).

Σ ι μ ί ο σ ι. Κατα τι διέρεσι δια κίριο κλάζματος βρίσκυμε πιλίκο μεγαλίτερο τυ διερετέυ. Κατα τιν διέρεσι δι' ακέρευ αριθμυ πυ ίνε μεγαλίτερος τις μονάδας, ίτε καταχριστικυ κλάζματος το πιλίκο ίνε μικρότερο τυ διερετέυ.

§ 5. Ι κανόνες τις πρόσθεσις κε τυ πολαπλασιαζμυ ισχίυν κε για τις περιπτόσις τον κλαζματικον αριθμον

Επιδι ι πρόσθεσι κε ο πολαπλασιαζμος καταλίγι, όπος έχυμε δι, στιν πρόσθεσι κε στον πολαπλασιαζμο τον ακέρεον αριθμον, μπορύμε να λογαριάσυμε, πος ι βασικι κανόνες τις πρόσθεσις κε τυ πολαπλασιαζμυ, πυ επαλιθέβυν για τυς ακέρευς αριθμυς, μένυν ι ίδιι κε για τυς κλαζματικυς αριθμυς.

§ 6. Πιο πολίπλοκο παράδιγμα πράξις με κλαζματικυς αριθμυς.

Π α ρ ά δ ι γ μ α. Ας κάνυμε τιν πράξι τις παράστασις με γράματα:

$$H = \frac{6p}{abc}, p = 30\frac{2}{3}, a = 3\frac{6}{7}, b = 5\frac{4}{9}, c = \frac{76}{10}$$

Λ ί σ ι. Αντικαθιστύμε τιν αριθμιτικι σιμασία τον γραμάτον.

$$H = \frac{6 . 30\frac{2}{3}}{3\frac{6}{7} . 5\frac{4}{9} . \frac{76}{10}}.$$

Τρέπυμε τυς μιχτυς σε καταχριστικα κλάζματα.

$$H = \frac{6 . \frac{92}{3}}{\frac{27}{7} . \frac{49}{9} . \frac{76}{10}}.$$

Εχτελύμε τις πράξις.

Γράφυμε χοριστα το διερετέο $\frac{6 . 92}{3}$. Τι διέρεσι αφτυ τυ κλάζματος με όλυς τυς άλυς αντικαθιστάμε με πολαπλασιαζμο επι τυς αντίθετυς αριθμυς.

$$\frac{6 . 92 . 7 . 9 . 10}{3 . 27 . 49 . 76}$$

Απλοπιύμε:

$$\frac{6 . 92 . 7 . 9 . 10}{3 . 27 . 49 . 76} = \frac{46 . 10}{3 . 7 . 19} = \frac{460}{399} = 1\frac{61}{399}.$$

Σ ι μ ί ο σ ι. Οταν κάνυμε τις πράξις πάντα πρέπι να αρχεστύμε στι γραμι τυ κλάζματος, αντικαθιστόντας τυς κλαζματικυς αριθμυς στον αριθμιτι κε στον παρονομαστι με αριθμυς, πυ περιέχυν στον αριθμιτι κε στον παρονομαστι μονάχα ακέρευς αριθμυς.

XII. ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

§ 1. Απανκελία κε γραφι τον δεκαδικον κλαζμά τον.

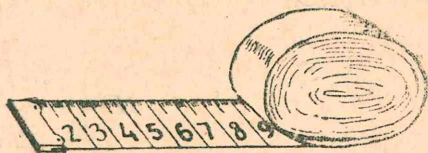
Ο τρόπος με τον οπίο εμις απανκέλυμε κε γράφυμε τυς ακέρευς αριθμυς ονομάζετε **δεκαδικο ςίςτιμα αρίθμιςις**, διότι καθεμια μονάδα τις ανότερις ςιρας ςτο ςίςτιμα τύτο περιέχι 10 μονάδες τις πλαγινις κατότερις ςιρας: ι μια χιλιάδα ίνε 10 φορες μεγαλίτερι απο τιν εκατοντάδα, ι εκατοντάδα ίνε 10 φορες μεγαλίτερι τις δεκάδας, ι δεκάδα δέκα φορες μεγαλίτερι τις μονάδας, τιν οπία ονομάζυμε **απλι μονάδα**. Τον τρόπο αφτο τυ ςχιματιζμυ τον μονάδον ςτυς λογαριαζμύς-μας, μπορύμε να επεχτίνυμε κε ςε κάμποςυς κλαζματικυς αριθμυς μικρότερυς απο τιν μονάδα — ςτα ονομαζόμενα **δεκαδικα κλάζματα**.

Οριζμος. **Δεκαδικο κλάζμα ονομάζετε ο κλαζματικος αριθμος, τυ οπίυ παρονομαςτις ίνε ο αριθμος 10 ίτε ι δίναμι τυ αριθμυ 10.**

Ι κλαζματικι αριθμι: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{7}{100}, \frac{23}{100}$ ίνε δεκαδικα κλάζματα.

Ας πάρυμε το μέτρο (ςχ. 5) ιποδιεριμένο ςε ςαντίμετρα. Ας παραδεχτύμε το μέτρο για μονάδα.

Διερόντας τι μονάδα ςε 10 μέρι, βρίςκυμε ένα δέκατο μέρος τις μονάδας: $\frac{1}{10}$, διερόντας το δέκατο μέρος ςε δέκα ίςα μέρι, βρίςκυμε εκατοςτο μέρος τις μονάδας: $\frac{1}{100}$. Παρατιρύμε, πος τα δεκαδικα κλάζματα έχυν τιν ίδια ςχέςι με το δεκαδικο ςίςτιμα τις αρίθμιςις. Αφτο μας οδίγιςε ςτι ςκέπςι, πός μπορύμε τα μέρι αφτα να τα γράπςυμε χορις παρονομαςτι; προς τύτο, ι ςιμαςία κε ι ονομαςία κάθε δεκαδικυ κλάζματος ορίζετε απο τι θέςι εκίνι, τιν οπίαν πιάνι ο αντίςτιχος αριθμος.



Σχ. 5

Απο τις ιδιότιτες τυ δεκαδικυ ςιςτίματος ςινάγυμε, πος τα δεκαδικα μέρι πρέπι να βρίςκυντε δίπλα κε ςτα δεξςια τις μονάδας, επιδι το ένα δέκατο ίνε 10 φορες ολιγότερο απο τι μονάδα. Μένι μονάχα να χορίςυμε το ακέρεο μέρος τυ αριθμυ απο το κλαζματικο. Αφτο γίνετε με τι βοίθια τις ιποδιαςτολις.

Σίμφονα μ' αφτον το τρόπο ας γράπςυμε ένα παράδιγμα, τέςαρες ακέρευς κε οχτο δέκατα:

$$4\frac{8}{10}=4{,}8.$$

Αν θα θέλαμε να γράπςυμε ςτο δεκαδικο ςίςτιμα αριθμο, πυ περιέχι κε εκατοςτα μέρι, τότε θα ίταν ανάνκι τα εκατοςτα να τα γράπςυμε δίπλα κε δεξςια τον δέκατον. Ετςι λιπον τα δέκατα μερίδια θα πιάςυν τιν πρότι θέςι ςτα δεξςια ίςτερα απο τιν ιποδιαςτολι, πυ χορίζι τις ςιρες τον ακέρεον μονάδον, απ' τις ςιρες τον κλαζματικον μονάδον, κε τα εκατοςτα — ςτι δέφτερι θέςι ςτα δεξςια τις ιποδιαςτολις. Π. χ.

$$4\frac{83}{100}=4{,}83.$$

Με τον ίδιο τρόπο εξςακολυθυν τι γραφι τον χιλιοςτον, δεκάκις χιλιοςτον κε τον άλον πιο μικρον δεκαδικον μερον τις μονάδας.

Για τιν αντικατάςταςι τις θέςις τον μονάδον, πυ λίπυν, χριςιμοπιύμε ςτο δεκαδικο ςίςτιμα το μιδενικο, πυ το βάζυμε ςτι θέςι τις αντίςτιχις ςιρας. Ετςι χριςιμοπιύμε το μιδενικο κε κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Παραδίγματος χάριν, κατα τι γραφι τυ κιρίυ κλάζματος, βάζυμε μιδενικο ςτι θέςι τον ακέρεον μονάδον. Διλ. γράφυμε 0,3 αντις τυ κλάζματος $\frac{3}{10}$.

Ας δόςυμε παραδίγματα τις χριςιμοπίιςις τυ μιδενικυ κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

$$\frac{1}{10}=0{,}1.\quad \frac{5}{10}=0{,}5.\quad \frac{1}{100}=0{,}01.\quad \frac{7}{100}=0{,}07.\quad \frac{28}{100}=0{,}28.$$

$$\frac{1}{1000}=0{,}001.\quad \frac{4}{1000}=0{,}004.\quad \frac{29}{1000}=0{,}029.\quad \frac{156}{1000}=0{,}156.$$

$$\frac{703}{1000}=0{,}703.\quad 205\frac{402}{1000}=205{,}402.$$

Ας ςινοπςίςυμε όλυς τυς κανόνες τιν παράςταςις τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Κατα τι γραφι τον δεκαδικον κλαζμάτον χορίζυν με ιποδιαςτολι το ακέρεο μέρος απο το κλαζματικο. Αν ι ακέρεες μονάδες λίπυν, τότε ςτι θέςι-τυς βάζυν μιδενικο. Τα ψιφία, πυ παραςτένυν τα δέκατα μέρι, γράφυν ςτιν πρότι θέςι ςτα δεξςια τις ιποδιαςτολις, τα εκατοςτα μέρι ςτι δέφτερι θέςι, τα χιλιοςτα — ςτιν τρίτι κ.υ.κ.

Κσέροντας να γράπσυμε τα δεκαδικα κλάζματα, μπορὺμε κε να τα απανκέλυμε: λ. χ. θα απανκέλυμε:

0,1 — ένα δέκατο, 0,01 — ένα εκατοστο,
0,001—ένα χιλιοστο, 0,2—δίο δέκατα,
0,03 — τρία εκατοστα, 0,25 — ίκοσι πέντε εκατοστα,
0,007, — εφτα χιλιοστα, 0,023 — ικοσιτρία χιλιοστα,
0,271 — διακόσια εβδομίντα ένα χιλιοστα,
52,325 — πενίντα δίο ακέρεα κε τριακόσια ικοσιπέντε χιλιοστα.

Κατα τιν απανκελία τυ δεκαδικυ κλάζματος ο αριθμος, πυ βρίσκετε μετα τιν ιποδιαστολι, διαβάζετε σαν αριθμιτις. Στον παρονομαστι διαβάζετε ο αριθμος, πυ παραστένετε με τι μονάδα κε τόσα μιδενικα, όσα πσιφία ιπάρχυνε μετα τιν ιποδιαστολι.

§ 2. Το δεκαδικο κλάζμα ος απλο κλάζμα.

Ι ιδιότιτες τον δεκαδικον κλαζμάτον κε ι τρόπι τις απανκελίας κε τις γραφίς-τυς, σε μερικες περιπτόσις μας ανανκάζυν να προτιμίσυμε περισότερο τα δεκαδικα κλάζματα απο τα απλα. Νά, π.χ. όταν έχυμε να κάνυμε λογαριασμυς στο μετρικο σίστιμα, τα δεκαδικα κλάζματα απλυστέβυν το γράπσιμό μας. Αντις να γράπσυμε 4 χγ 287 γ, γράφυμε: 4,287 χγ.

Μαθένοντας τα κλαζματα, θα γνοριστύμε κε με τις άλες περιπτόσις, στις οπίες ίνε καταλιλότερο να εφαρμόσυμε τα δεκαδικα κλάζματα αντι τον απλον.

Εντύτις, σιναντύμε κε τέτιες περιπτόσις, όταν τα απλα κλάζματα ίνε πιο κατάλιλα απο τα δεκαδικα. Τα απλα κλάζματα έχυν μια ιδιότιτα, ι οπία μονάχα σε ελάχιστες περιπτόσις μπορι να εφαρμοσθι κε στα δεκαδικα, — μας επιτρέπυν να κάνυμε απλοπίισι. Π.χ. το κλάζμα 0,125 αν το γράπσυμε με μορφι απλυ κλάζματος έχι πολι απλι μορφι.

$$0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}.$$

Το δεκαδικο κλάζμα, αν ίνε ανάνκι, μπορύμε να το τρέπσυμε σε απλο κλάζμα κε τ'ανάπαλι.

§ 3. Σίνκρισι τυ μεγέθυς τον δεκαδικον κλαζμάτον κε στρονκίλοσι τον αριθμον, πυ παραστένυν δεκαδικα κλάζματα.

1. Οταν εργάζοντε στον τόρνο, σιχνα σιμβένι να μεταβάλυμε τον αριθμο τον στροφον το τροχυ κε τιν ταχίτιτα τις κίνισις τις τενίας. Ι ταχίτιτα τις τενίας δίχνι, κατα πόσα μέτρα στο δεφτερόλεφτο μετακινίτε ι τενία πάνο στον τροχοφόρο άξονα.

Ας ιποθέσυμε πος ο τόρνος έχι 4 ταχίτιτες τις τενίας: 7,32 μ στο δεφτερόλεπτο· 5,5 μ· 4,4 μ κε 4,2 μ στο δεφτερόλεπτο. Ας σινκρίνυμε αφτυς τυς αριθμυς. Πια ταχίτιτα ίνε ι πιο μεγάλι κε πια ι πιο μικρι;

Ας διατάκσυμε αφτυς τυς αριθμυς κατα τιν κατιύσα το μεγέθυς-τυς

$$7{,}32 > 5{,}5 > 4{,}4 > 4{,}2.$$

Ο αριθμος 7,32 ίνε μεγαλίτερος όλον τον άλον αριθμον, διοτι ι 7 μονάδες ίνε περισότερες απο κάθε άλο αριθμο τις σιρας πυ έχυνε μόνο 5 ίτε 4 ακέρεες μονάδες, όσο κι αν ίνε πολα τα άλα μέρι τις μονάδαςτυς. Για τιν ίδια ετία το 5,5 ίνε μεγαλίτερος, παρα το 4,4 κε το 4,2.

Ι τελεφτέι διο αριθμι τις προιγύμενις σιρας έχυν τον ίδιο αριθμο τον ακερέον μονάδον, αλα ο αριθμος 4,4 ίνε μεγαλίτερος, παρα το 4,2 επιδι έχυν μεν ίσα τα ακέρεα μέρι-τυς, αλα τα δέκατα μέρι τυ πρότυ ίνε περισότερα απ' τα δέκατα μέρι τυ δέφτερυ

Παρόμια σινκρίνυν τα δεκαδικα κλάζματα κε με πολα δεκαδικα πσιφία μετα τιν ιποδιαστολι.

Εστι λιπον για να σινκρίνυμε διο αριθμυς, πυ περιέχυν δεκαδικα κλάζματα, πρέπι να σινκρίνυμε τις ακέρεες μονάδες-τυς. Εκίνος ο αριθμος ίνε μεγαλίτερος, τυ οπίυ το ακέρεο μέρος ίνε μεγαλίτερο. Εαν ο αριθμος τον ακέρεον μονάδον στυς αριθμυς, πυ σινκρίνυμε ίνε ο ίδιος, τότε πρέπι να σινκρίνυμε τα δέκατα μέρι-τυς. Εκίνος δε ο αριθμος, πυ έχι μεγαλίτερο αριθμο στα δέκατά τυ, θα ίνε κε ο μεγαλίτερος. Εαν όμος κε ο αριθμος τον δέκατον πσιφίον-τυς ίνε ίδιος, τότε σινκρίνυν τα εκατοστά-τυς κ.τ.λ.

2. Ας σινκρίνυμε τυς αριθμυς: 0,2· 0,3· 0,5.

Τα κλάζματα αφτα μονάδες δεν έχυν. Μεγαλίτερο θα ίνε εκίνο, πυ έχι περισότερα δέκατα

Ας τα βάλυμε στι σιρα σίμφονα με το μέγεθός-τυς.

$$0,5 > 0,3 > 0,2.$$

3. Ας σινκρίνυμε τυς αριθμυς: 0,531· 0,582· 0,594.

Παρατιρύμε, πος ι αριθμι αφτι δεν έχυν ακέρεες μονάδες, πος όλι τυς έχυν τα ίδια δέκατα πσιφία κε πος διακρίνυντε απο τα εκατοστά-τυς. Ινε φανερο, πος μεγαλίτερος ίνε εκίνος, πυ έχι τον μεγαλίτερο αριθμο στα εκατοστά-τυ:

$$0,594 > 0,582 > 0,531.$$

Κατα τιν σίνκρισι τον αριθμον, πυ παραστίθικαν με δεκαδικα κλάζματα, σιχνα αντικαταστύμε τυς δεδομένυς αριθμυς με τυς αντίστιχυς μ' αφτυς κατα προσέγκισι, ίτε στρονκιλομένυς αριθμυς.

Για τιν στρονκίλοσι τον δεκαδικον κλαζμάτον εποφελύμαστε κίνυς τυς τρόπυς, πυ ίχαμε εφαρμόσι νορίτερα, για τιν στρονκίλοσι τον ακέρεον αριθμον (κεφ. III, § 16).

Ας δόσυμε παραδίγματα στρονκίλοσις.

Δεδομένος αριθμος.	Αριθμος κατα προσέγκισι.
0,3758	0,38 στρονκίλοσι σε εκ. μερίδια
0,3724	0,37 ,, ,, ,, ,,
0,625	0,62 ,, ,, ,, ,,
0,635	0,64 ,, ,, ,, ,,

§ 4. Τροπι τον δεκαδικον κλαζμάτον σε ομόνιμα κε απλοπίισι τυ δεκαδικυ κλάζματος.

1. Να τραπυν σε μερίδια χιλιόμετρυ 300 μμ.

Λ ί σ ι. Κσέρυμε πος το 1 χμ = 1000 μ = = (1000 · 1000) μμ = 1 000 000 μμ. Για να βρύμε πιό μέρος αποτελύνε τα 300 μμ, αν για ακέρεο παραδεχόμαστε 1 000 000 μμ, πρέπι να κάνυμε διέρεσι. Για να γράπσυμε τιν απάντισι ος δεκαδικο κλάζμα θάχυμε:

$$\frac{300}{1\,000\,000} = 0,000300.$$

Εαν κάνυμε απλοπίισι αφτυ τυ κλάζματος πριν να το γράπσυμε ος δεκαδικο, χρισιμοπιόντας τιν κιριότερι ιδιότιτά-τυ, θα έχυμε:

$$\frac{300}{1\,000\,000} = \frac{3}{10\,000} = 0,0003.$$

Τα κλάζματα 0,000300 κε 0,0003 ίνε ίσα.

0,000300 = 0,0003. Το δέφτερο δεκαδικο κλάζμα έχι πιο απλύστερι μορφι.

2. Ας σινκρίνυμε τυς αριθμυς, 2,8· 2,80. 2,800.

Ι Αριθμι αφτι έχυν τον ίδιο ακέρεο αριθμο, κε τον ίδιο αριθμο δέκατον. Αλα μέρι δεν έχυν. Ολτε ίνε ίσι.

$$2,8 = 2,80 = 2,800.$$

Αν θα παραστίσυμε τα δεκαδικα αφτα κλάζματα σε απλα κλάζματα θάχυμε:

$$2\frac{8}{10} = 2\frac{80}{100} = 2\frac{800}{1000}.$$

Τα κλάζματα ίνε ίσα σίμφονα με τιν ιδιότιτα τον απλον κλαζμάτον. Οταν γράφυμε μιδενικα στο τέλος τυ δεκαδικυ αριθμυ αλάζυμε μονάχα τι μορφί-τυ, ενο το μέγεθός-τυ δεν αλάζι. Ινε σοστο κε το αντίθετο: εκσαλίφοντας μιδενικα μετα τιν ιποδιαστολι απο το τέλος τυ δεκαδικυ αριθμυ, δεν αλάζομε το μέγεθος τυ κλάζματος.

Χάρις σ' αφτο, μπορύμε να εκφράσυμε τα δεκαδικα κλάζματα με κλάζματα τις ίδιας ονομασίας, διλ. να τρέπσυμε τα δεκαδικα κλάζματα σε ομόνιμα.

3. Να τραπυν σε ομόνιμα τα κλάζματα: 0,25, 0,1732, 3,154.

Λ ί σ ι.

0,25 = 0,2500. 0,1732 = 0,1732. 3,154 = 3,1540.

Στο παράδιγμα αφτο όλυς τυς αριθμυς τυς τρέπσαμε σε δεκάκις χιλιοστα.

1. Για να τρέπσυμε κάμποσα δεκαδικα κλάζματα σε ομόνιμα, πρέπι να εκσισόσυμε τον αριθμο τον πσιφίον-τυς μετα τιν ιποδιαστολι σ' όλα τα δοθέντα κλάζματα, γράφοντας απ' τα δεκσια στο τέλος-τυς μιδενικα.

Ι κιριότερι ιδότιτα τυ κλάζματος, πυ εφαρμόζετε στα δεκαδικα, μας επιτρέπι επίσις να απλοπιίσυμε τα δεκαδικα κλάζματα, αν έχυν μιδενικα στο τέλος-τυς μετα τιν ιποδιαστολι. Ι αξία τυ κλάζματος απ' αφτο δε μεταβάλετε.

Ας απλοπιίσυμε το κλάζμα 0,8700 μ,

$$0,8700 = \frac{8700}{10\,000} = \frac{87}{100} = 0,87 \text{ μ}.$$

II. Εαν το δεκαδικο κλάζμα έχι ςτο τέλος μιδενικα, τότε αφτα τα μιδενικα μπορύμε να τα απορίπςυμε. Ι ακςία τυ κλάζματος απ' αφτο δε μεταβάλετε.

Τιν τελεφτέα μετατροπι μπορύμε να ονομάςυμε απλοπίιςι τυ κλάζματος.

§ 5. Πρόςθεςι κε αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

1. Να προςτεθυνε ι αριθμι $3{,}75 + 8 + 4{,}125$.

Τι λίςι μπορύμε να γράπςυμε με δίο τρόπυς:

$$\begin{array}{r} 3,750 \\ +\ 8,000 \\ 4,125 \\ \hline 15,875 \end{array} \quad \text{ίτε} \quad \begin{array}{r} 3,75 \\ +\ 8 \\ 4,125 \\ \hline 15,875 \end{array}.$$

Στιν πρότι περίπτοςι τρέπςαμε όλα τα κλάζματα ςε ομόνιμα, γράφοντας ςτο τέλος-τυς μιδενικα κε παραςτένοντας τα κλάζματα ςε χιλιοςτα.

2. Ας κάνυμε αφέρεςι: $4{,}875 - 2{,}37264$.

Λ ί ς ι.

$$\begin{array}{r} -\ 4,87500 \\ 2,37264 \\ \hline 2,50236 \end{array} \quad \text{ίτε} \quad \begin{array}{r} -\ 4,875 \\ 2,37264 \\ \hline 2,50236 \end{array}.$$

Τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον κάνυν έτςι, όπος κε ςτυς ακέρευς αριθμυς.

Για να προςθέςυμε ίτε να αφερέςυμε δεκαδικα κλάζματα πρέπι:

1) να γράπςυμε τυς αριθμυς τον ένα κάτο απ' τον άλο έτςι, όςτε ι ακέρεες μονάδες να βρίςκυντε κάτο απο τις ακέρεες, τα δέκατα κάτο απο τα δέκατα, τα έκατοςτα — κάτο απο τα εκατοςτα κ.υ.κ.

2) Να κάνυμε τιν πρόςθεςι ίτε τιν αφέρεςι, όπος κάνυμε με τυς ακέρευς αριθμυς.

3) Να βάλυμε τιν ιποδιαςτολι ςτο εβριςκόμενο, ςε κίνι τι θέςι τιν οπία έχι ςτυς δεδομένυς για τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι αριθμυς.

Σ ι μ ί ο ς ι. Οταν γράφυμε τα κλάζματα ςτιν πρόςθεςι κε αφέρεςι πρέπι να προςέκςυμε, όλες ι ιποδιαςτολες να βρεθυν ι μια κάτο απ' τιν άλι.

Ας δόςυμε προςοχι ςτιν ακόλυθι περίπτοςι τις αφέρεςις:

3. $1 - 0{,}027564 = 0{,}972436$.

Εδο τυς αριθμυς όλον τον ςιρον αφερυν απ' το 9, εχτος τον τελεφτέο τον οπίο αφερυν απ' το 10.

4. Σιχνα ςιμβένι κατα τιν πρόςθεςι κε αφέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον να βρίςκυμε το άθριζμα ί τι διαφορα κατα προςέγκιςι.

Να βρεθι το άθριζμα κε ι διαφορα με ακρίβια ενος εκατοςτυ:

1) $8{,}5434 + 2{,}271 + 3{,}186 + 2{,}0{,}5$

2) $12{,}3764 - 5{,}171$.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα μας λέι, πος πρέπι να ςτρονκιλέπςυμε το αποτέλεζμα ςτα πςιφία τον εκατοςτον απορίπτοντας όλες τις ιπόλιπες ςιρες απ' τα δεξια.

$$1)\ \begin{array}{r} 8,5434 \\ 2,271 \\ +\ 3,186 \\ 2,05 \\ \hline 16,05 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} -\ 12,3764 \\ 5,171 \\ \hline 7,21 \end{array}$$

§ 6. Πολαπλαςιαζμος δεκαδικον κλαζμάτον.

1. Πολαπλαςιαζμος επι 10 κε δίναμι τυ αριθμυ 10.

1. Εαν ςινκρίνομε τυς αριθμυς: 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1, 1, ίτε 0,00097, 0,0097, 0,097, 0,97, 9,7, 97, καθένας αριθμος, πυ ακολυθα ίνε 10 φορες μεγαλίτερος απο τον προιγύμενό-τυ ίτε καθένας προιγύμενος αριθμος, πολαπλαςιαζόμενος επι 10 δίνι τον ακόλυθό-τυ αριθμο, κε τυναντίο — κάθε ακολυθος αριθμος διερύμενος δια 10, δίνι τον προιγύμενό-τυ.

Απο όςα ίπαμε φένετε, πος για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι 10 αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα δεξια κατα ένα πςιφίο.

2. 1) $84{,}72 \cdot 10 = 847{,}2$ 3) $3{,}2 \cdot 10 = 32$

2) $0{,}0271 \cdot 10 = 0{,}271$ 4) $0{,}512 \cdot 10 = 5{,}12$.

Για να διερέςυμε δεκαδικο κλάζμα δια 10 αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα αριςτερα κατα ένα πςιφίο.

3. 1) $84{,}7 : 10 = 8{,}47$ 3) $0{,}42 : 10 = 0{,}042$

2) $3{,}45 : 10 = 0{,}345$ 4) $0{,}056 : 10 = 0{,}0056$.

Τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι επι 100, 1000 κ.τ.λ. αντικαθιςτυν με ςινεχικυς πολαπλαςιαζμυς κε διερέςις με τον 10. Π.χ.

4. Να πολαπλαςιαςτυν ι αριθμι: $4{,}273 \cdot 100$

Λ ί ς ι. $4{,}273 \cdot 100 = 4{,}273 \cdot 10 \cdot 10 = 42{,}73 \cdot 10 = 427{,}3$.

5. Να διερεθι: $35{,}68 : 100$.

Λ ί ς ι. $35,68 : 100 = 35,68 : 10 : 10 = 3,568 : 10 = 0,3568.$

Ι. Για νά πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι αριθμο, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικο, αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτα δεκςια κατα τόςα πςιφία, όςα μιδενικα ιπάρχυν ςτον πολαπλαςιαςτι.

ΙΙ. Για να διερέςυμε δεκαδικο κλάζμα δια αριθμυ, πυ παραςτένι τι μονάδα με μιδενικα, αρκι να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι ςτ' αριςτερα κατα τόςα πςιφία, όςα μιδενικα ιπάρχυν ςτο διερέτι.

Σ ι μ ί ο ς ι. Κατα τιν μεταφορα τις ιποδιαςτολις τα πςιφία, πυ δεν αρχυν, όπος ςτι διέρεςι έτςι κε ςτον πολαπλαςιαζμο αντικαθιςτύνε με μιδενικα.

Ας φέρυμε παραδίγματα:

6. $37,2 \,.\, 1000 = 37\,200.$

Εδο τι ιποδιαςτολι πρέπι να μεταφέρυμε κατα τρία πςιφία ςτα δεκςια. Δεν αρχυν δίο πςιφία. Βάλαμε ςτι θέςι-τυς μιδενικα.

7. $0,25 : 100 = 0,0025.$

Εδο μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι κατα δίο θέςις ςτα αριςτερα. Δεν αρχύνε δίο πςιφία. Βάλαμε ςτι θέςι-τυς μιδενικα.

Σ ι μ ί ο ς ι. Μεταφέροντας τιν ιποδιαςτολι ςτα δεκςια αφκςάνομε το δεκαδικο κλάζμα κατα 10, 100, 1000 κ.τ.λ. φορες. Μεταφèροντας τιν ιποδιαςτολι ςτ' αριςτερα, ελατόνυμε το δεκαδικο κλάζμα κατα 10, 100, 1000 φορες, ανάλογα με τον αριθμο τον πςιφίον, πυ έχι μεταφερθι ι ιποδιαςτολι.

1) $0,723 \,.\, 100 = \frac{723}{1000} \cdot 100 = \frac{723 \,.\, 100}{1000} = \frac{723}{10} = 72,3.$

2) $412,73 : 100 = \frac{41\,273}{100} : 100 = \frac{41\,273}{100 \,.\, 100} = \frac{41\,273}{10\,000} = 4,1273.$

Πολαπλαςιαζμος δεκαδικυ αριθμυ επι ακέρεο.

Τον πολαπλαςιαζμο τυ δεκαδικυ αριθμυ επι ακέρεο, διεκςάγυμε πολαπλαςιάζοντας τα ςιμένοντα πςιφία τυ δεκαδικυ επι τον ακέρεο.

8 Να πολαπλαςιαςτυν $4,18 \,.\, 7.$

Ας βρύμε το γινόμενο:

$$418 \,.\, 7 = 2926.$$

Το εβριςκόμενο γινόμενο διαφέρι απο το ζιτύμενο γιατι αντικαταςτένοντας τον αριθμο 4,18 με τον αριθμο 418, αφκςίςαμε τον πολαπλαςιαςτέο 4,18 100 φορες. Το γινόμενο επίςις αφκςίθικε 100 φορες. Γι'αφτο

για να βρύμε το ζιτύμενο γινόμενο, πρέπι να ελατόςυμε τον αριθμο 2926 100 φορες κε θα βρύμε: $4,18 \,.\, 7 = 29,26.$

Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι ακέρεο, πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τυς αριθμυς, μι δίνοντας προςοχι ςτιν ιποδιαςτολι, κε ςτο γινόμενο πρέπι να κςεχορίςυμε με τιν ιποδιαςτολι απ' τα δεκςια τόςα πςιφία, όςα ίςανε ίςτερα απο τιν ιποδιαςτολι ςτον κλαζματικο παράγοντα.

Το γινόμενο τυ $4,18 \,.\, 7$ μπορύμε να βρύμε με διο τρόπυς:

1) Πολαπλαςιάζυμε το 4,18 ςαν απλο κλàζμα:

$$4,18 \,.\, 7 = \frac{418}{100} \cdot 7 = \frac{418 \,.\, 7}{100} = \frac{2926}{100} = 29,26,$$

2) Αντικαθιςτύμε τον πολαπλαςιαζμο με τιν πρόςθεςι:

$$4,18 \,.\, 7 = 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 + 4,18 = 29,26.$$

Ο πολαπλαςιαςτέος ίχε δίο δεκαδικα πςιφία, ο πολαπλαςιαςτις δεν ίχε διόλυ, κε το γινόμενο έχι επίςις δίο δεκαδικα πςιφία.

9. $,2 \,.\, 7 = 3\frac{2}{10} \,.\, 7 = \frac{32 \,.\, 7}{10} = \frac{224}{10} = 22,4.$

Ο πολαπλαςιαςτέος ίχε ένα δεκαδικο πςιφίο, ο πολαπλαςιαςτις ίνε ακέρεος το γινόμενο έχι ένα δεκαδικο πςιφίο.

Θα δόςυμε ακόμα παραδίγματα τυ πολαπλαςιαζμυ τυ δεκαδικυ κλάζματος κε τυ ακέρευ με δεκαδικο κλάζμα επι ακέρεο.

10. $0,283 \,.\, 25 = 7,075.$

11. $0,00538 \,.\, 4307 = 23,17166.$

12. $0,02854 \,.\, 3 = 0,08562.$

13. $14,805 \,.\, 359 = 5314,995.$

Πολαπλαςιαζμος επι ακέρεο αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα.

14. Να βρεθι το γινόμενο: $2,875 \,.\, 500.$

$$2,875 \,.\, 500 = 2,875 \,.\, 5 \,.\, 100 = 14,375 \,.\, 100 = 1437,5.$$

Για να παλαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι αριθμο, πυ τελιόνι ςε μιδενικα πρέπι να πολαπλαςιάςυμε τον πολαπλαςιαςτέο επι το ςιμένον μέρος τυ πολαπλαςιαςτι κε έπιτα να μεταθέςυμε τιν ιποδιαςτολι ςτο εβριςκόμενο, τόςες θέςις προς τα δεκςια όςα μιδενικα ίχε ςτο τέλος ο πολαπλαςιαςτις.

Πολαπλαςιαζμος δεκαδικυ κλάζματος επι δεκαδικο κλάζμα.

15. Να βρεθι το γινόμενο 6,19 . 2,5.

Ας ιποδίκςυμε διο λίςις:

1) Τρέπυμε κε τυς διο αριθμυς ςε απλα κλάζματα.

$$6,19 . 2,5 = \frac{619}{100}\cdot\frac{25}{10} = \frac{619 . 25}{1000} = \frac{15475}{1000} = 15,475.$$

2) Ας βρύμε το αποτέλεζμα τυ πολαπλασιαζμυ 6,19 . 2,5 με άλο τρόπο. Μεγαλόνυμε τον πρότο παράγοντα 100 φορες, κε τον δέφτερο παράγοντα 10 φορες, θα έχυμε το γινόμενο: 619 . 25 = 15 475.

Το γινόμενο αφτο ίνε μεγαλίτερο τυ ζιτύμενυ 1000 φορες. Για να βρύμε το ζιτύμενο γινόμενο, πρέπι να ελατόςυμε 1000 φορες το εβριςκόμενο:

$$6,19 . 2,5 = \frac{619 . 25}{1000} = 15,475.$$

Μετρόντας τον αριθμο τον πςιφίον, πυ βρίςκοντε ςτα δεκςια τις ιποδιαςτολις τον παραγόντον κε τυ γινομένυ, μπορύμε να παραδεχτύμε τον ακόλυθο κανόνα τυ πολαπλασιαζμυ τον δεκαδικον κλαζμάτον:

Για να πολαπλαςιάςυμε δεκαδικο κλάζμα επι δεκαδικο κλάζμα, πρέπι να τα πολαπλαςιάςυμε ςαν να ίνε ακέρει, χορις να πάρυμε ιπ' όπςι τις ιποδιαςτολες, κε ςτο εβριςκόμενο γινόμενο απο τα δεκςια ςτ' αριςτερα να χορίςυμε με τιν ιποδιαςτολι τόςα πςιφία, όςα έχυν κε ι διο παράγοντες.

Σ ι μ ί ο ς ι. Κατα τιν μεταφορα τις ιποδιαςτολις ςτο μέρος, πυ λίπυν πςιφία βάζυν μιδενικα.

16. **Παράδιγμα.** Να πολαπλαςιαςθι: 0,72 . 0,003.

Λ ί ς ι. 0,72 . 0,003 = 0,00216, όπυ 72 . 3 = 216.

Σ ι μ ί ο ς ι. Κατα τον πολαπλαςιαζμο τον δεκαδικον αριθμον, πολαπλαςιάζοντε τα ςιμένοντα μέρι τον παραγόντον.

§ 7. Διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον.

Διέρεςι δεκαδικυ κλάζματος δι ακέρευ αριθμυ. 1. Να διερεθι: 164,32:52

Λ ί ς ι. Τι διέρεςι δεκαδικυ κλάζματος δι' ακέρευ αριθμυ αρχίζυν έτςι, όπος κε ςτιν διέρεςι τον ακέρεον αριθμον. Στο παράδιγμά-μας πρέπι να διερέςυμε το 164,32 δια 52. Θα έχυμε:

164,32:52 = 3,16.

Τι λίςι γράφυμε ος εκςις:


```
 164,32 |52
-156    |3,16
   83
  -52
   312
  -312
```

Σιχνα ςιμβένι, όταν φτάςυμε ςτιν τελεφτέα ςιρα τυ διερετέυ, να βρίςκυμε κε ιπόλιπο.

Τότε μπορύμε το ιπόλιπο αφτο να το μετατρέπςυμε ςε μέρι τις ακόλυθις κατότερις τάκςις κε να εκςακολυθίςυμε τι διέρεςι.

2. 63,189:18:

```
63,189 |18
 91    |3,5105
  18
   90
```

Για να διερέςυμε δεκαδικο δια ακερέυ, πρέπι να διερέςυμε πρότα το ακέρεο μέρος τυ διερετέυ, βάνοντας ιποδιαςτολι ςτο πιλίκο, το ιπόλιπο ενόνυμε με το κλαζματικο μέρος, τρέποντας αφτο ςε δεκαδικο μέρος, κε εκςακολυθύμε τι διέρεςι τυ κλαζματικυ μέρυς.

Σ ι μ ί ο ς ι. Εαν τον αριθμο, πυ βρίκαμε μετα τιν ιποδιαςτολι κατα τιν διέρεςι τον πςιφίον ιπερβένι εκίνον τον αριθμο τον πςιφίον, πυ μας χριάζοντε, για τι λίςι τυ προβλίματος, τότε το εβριςκόμενο πιλίκο ςτρονκιλόνυν ςτις μονάδες εκίνις τις ςιρας, πυ μας χριάζετε να έχυμε ςτο πιλίκο.

Ετςι ςτο παράδιγμα 2 μπορύμε να ςταματίςυμε ςτο πιλίκο 3,51, αν μας χριαζότανε να έχυμε πιλίκο μονάχα ςε εκατοςτα μέρι.

Ας περάςυμε ςτι διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος.

Ι έβρεςι τυ ακέρευ όταν ίνε γνοςτο κάπιο μέρος-τυ, πυ παραςτένι δεκαδικο κλάζμα, μας ανανκάζι να διερέςυμε δια δεκαδικυ αριθμυ. Θα δόςυμε τυς κανόνες τις διέρεςις αφτις, χορις να μετατρέπςυμε το δεκαδικο κλάζμα ςε απλο.

Διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος. 3. Να διερεθυν:

1) 1,61 : 0,5, 2) 0,1808 : 0,452.

Λ ί ς ι. 1) Ας αφκςένυμε το διερετέο κε το διερέτι τόςες φορες όςτε ο διερέτις να γίνι ακέρεος αριθμος. Γι'αφτο ςτιν περίπτοςι αφτι κε τυς δίο αριθμυς πρέπι να πολαπλαςιάςυμε επι 10. Το πιλίκο απο τον πολαπλαςιαζμο αφτο δεν αλάζι:

1,61 : 0,5 = 16,1 : 5.

Για τιν τελιοτικι λίςι ὲμινε να κάνυμε διέρεςι δια ακέρευ αριθμυ:

$$16{,}1 : 5 = 3{,}22.$$

Ετςι κάνυμε τιν διέρεςι κε ςε κίνες τις περιπτόςις όταν το κλαζματικο μέρος τυ διερέτι περιέχι κάμποςα δεκαδικα πςιφία μετα τιν ιποδιαςτολι.

$$2)\ 0{,}1808 : 0{,}452 = 180{,}8 : 452 = 0{,}4.$$

Στιν περίπτοςι αφτι, για να γίνι ο διερέτις ακέρεος αριθμος κε το πιλίκο να μι αλάξι ανανκαςτίκαμε τον διερετέο κε τον διερέτι να μεγαλόςυμε 1000 φορες.

Για να βρίςκυμε το πιλίκο απο τι διέρεςι δια δεκαδικυ κλάζματος πρέπι πρότα να αφκςίςυμε τον διερετέο κε το διερέτι τόςες φορες, όςτε ο διερέτις να γίνι ακέρεος αριθμος. Γι' αφτο πρέπι τιν ιποδιαςτολι ςτο διερετέο κε ςτο διερέτι να μεταφέρυμε κατα τόςα πςιφία όςα έχι ο διερέτις μετα τιν ιποδιαςτολι· το πιλίκο απο αφτο δεν μεταβάλετε.

Ετςι, εαν έχυμε να κάνυμε μονάχα με δεκαδικα κλάζματα, μπορύμε να απλυςτέπςυμε τι διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον κε να διεκςάγυμε τιν διέρεςι τον δεκαδικον κλαζμάτον ςαν ακέρεον αριθμον.

Πρέπι να δόςυμε τιν προςοχί-μας ςε μερικες περιπτόςις τις διέρεςις τον δεκαδικον κλαζμάτον.

4. Να βρεθι το πιλίκο: $400{,}4 : 0{,}728$.

Λ ί ς ι. $400{,}4 : 0{,}728 = 400\,400 : 728 = 550.$

Σ ι μ ί ο ς ι. Στις περιπτόςις εκίνες, όταν τα πςιφία μετα τιν ιποδιαςτολι τυ διερετέυ ὶνε λιγότερα απο τυ διερέτι, πρὲπι να γράπςυμε ςτο τὲλος τυ διερετέυ μιδενικα.

5. 1) $9 : 0{,}75 = 900 : 75 = 12.$

2) $9{,}9 : 2{,}25 = 990 : 225 = 4{,}4.$

6. Να διερεθι ο $74{,}75 : 3{,}25$.

Λ ί ς ι. $74{,}75 : 3{,}25 = 7475 : 325 = 23.$

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν ο διερετέος κε ο διερὲτις έχυν τον ὶδιο αριθμο πςιφίον μετα τιν ιποδιαςτολι, τότε απορίπτυμε τιν ιποδιαςτολι κε έτςι ι διέρεςι μετατρὲπετε ςε διέρεςι ακέρεον αριθμον.

Ας ιποδίκςυμε πὸς να κάνυμε τις πράκςις με τα δεκαδικα κλάζματα ςε κίνες τις περιπτόςις, πυ ίνε ανάνκι να κάνυμε ςίνχρονα πολυς πολαπλαςιαςμυς κε πολες διερέςις.

7. Ας κάνυμε τις πράκςις τις παράςταςις: $\dfrac{4{,}5 \,.\, 0{,}18 \,.\, 0{,}005 \,.\, 40}{0{,}012 \,.\, 22{,}5}$.

Τα δεκαδικα κλάζματα μπορύμε να αντικαταςτίςυμε με ακέρευς αριθμυς, αφκςάνοντας τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι με τον ίδιο αριθμο.

Τι λίςι γράφυμε ος εκςις:

$$\frac{4{,}5 \,.\, 018 \,.\, 0{,}005 \,.\, 40}{0{,}012 \,.\, 22{,}5} = \frac{45 \,.\, 18 \,.\, 5 \,.\, 40 \,.\, 1000 \,.\, 10}{10 \,.\, 100 \,.\, 1000 \,.\, 12 \,.\, 225} =$$

$$= \frac{45 \cdot 18 \,.\, 5 \,.\, 40 \,.\, 10\,000}{12 \,.\, 225 \,.\, 1\,000\,000} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

XIII. ΣΙΝΔΙΑΖΜΕΝΕΣ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΚΙΝΑ ΚΕ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

§ 1. Τροπι δεκαδικυ κλάζματος ςε κινο κλάζμα.

Ιπαμε πια, πος οπιοδίποτε δεκαδικο κλάζμα μπορύμε να εκςετάςυμε κε ος δεκαδικο κε ος απλο:

$0{,}07$ — δεκαδικο κλάζμα, $\dfrac{7}{100}$ — απλο. Ι διαφορα ίνε μονάχα ςτον τ ρ ό π ο τ ι ς π α ρ ά ς τ α ς ι ς τυ κ λ ά ζ μ α τ ο ς. Γι' αφτο καθένα δεκαδικο κλάζμα μπορύμε να το αντικαταςτίςυμε με απλο κλάζμα.

Το απλο κλάζμα, πυ έχι προκίπςι, αν απλοπιίτε πρέπι να το α π λ ο π ι ί ς υ μ ε, π.χ.

$$0{,}24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

§ 2. Τροπι τυ κινυ κλάζματος ςε δεκαδικο.

1. Τα απλα κλάζματα, πυ έχυν παρονομαςτι τι μονάδα με τα μιδενικα ςτο τέλος-τυς, απ' εφθίας γράφοντε ςαν δεκαδικα.

Π. χ.

$$\frac{97}{100} = 0{,}97, \quad \frac{48}{10\,000} = 0{,}0048.$$

Για να παραςτένυμε απλο κλάζμα ος δεκαδικο κλάζμα, όταν ςτον παρονομαςτι δεν ίνε ι μονάδα με τα μιδενικα, αλα άλος κάπιος αριθμος, πρέπι να εκτελέςυμε διέρεςι.

2. Να τραπυν τα $\dfrac{5}{8}$ ςε δεκαδικο κλάζμα.

Κςέρυμε πος κάθε απλο κλάζμα μπορι να εκςεταςθι ςαν πιλίκο, πυ προκίπτι απο τι διέρεςι τυ αριθμιτι δια τυ παρονομαςτί-τυ: τα $\dfrac{5}{8}$

μπορόμε να λογαριάζυμε ος αποτέλεζμα τις διέρεσις τυ 5 δια τυ 8. Διερόντας το 5 δια τυ 8 θα έχυμε:

$$5:8=0,625.$$

Για να τρέπςυμε κινο κλάζμα ςε δεκαδικο πρέπι να διερέςυμε τον αριθμιτί-τυ δια τυ παρονομαστι ςίμφονα με τον κανόνα τις διέρεςις τον δεκαδικον κλαζμάτον.

§ 3. Απεριόριςτα δεκαδικα κλάζματα.

Κατα τι διέρεςι τυ αριθμιτι τυ κλάζματος δια τυ παρονομαςτι δεν βρίςκυμε πάντοτε τελιοτικο αποτέλεζμα.

1. Να τραπι ςε δεκαδικο κλάζμα ο αριθμος $\frac{2}{11}$. Διερύμε το 2 δια τυ 11.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 11 \\ -0 & 0,1818... \\ \hline 20 & \\ -11 & \\ \hline 90 & \\ -88 & \\ \hline 20 & \\ -11 & \\ \hline 90 & \\ -88 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Τα ιπόλιπα πυ μένυν απο τι διέρεςι αρχίζοντας απ' το τρίτο ιπόλιπο επαναλαμβάνοντε κε γι' αφτο αρχίζοντας απ' τα χιλιοστα θα βρύμε ςτο πιλίκο πςιφία, πυ επαναλαμβάνοντε. Το εβριςκόμενο τις διέρεςις αφτις ονομάζυμε απεριόριςτο δεκαδικο κλάζμα.

$$\frac{2}{11}=0,1818...$$

Αφτο ςιμένι, πος δεν ιπάρχι ακριβες δεκαδικο κλάζμα ιςοδίναμο με το κινο $\frac{2}{11}$.

Το τιύτο πιλίκο ςινίθος ςτρογγιλόνυν ςε μονάδες μιας οπιαςδίποτε ςιρας κε βρίςκυνε τιν αχςία τυ κλάζματος κατα προςένκιςι μιας μονάδας τις ςιρας αφτις. Ετςι, π. χ. λέγυν, πος τα $\frac{2}{11}\approx 0,18$ κατα προςένκιςι εκατοςτυ. (Το ςιμίο $\approx$ ςιμένι ιςότιτα κατα προςένκιςι).

$\frac{2}{11}\approx 0,182$ κατα προςένκιςι ενος δέκατυ.

$\frac{2}{11}\approx 0,1818$ κατα προςένκιςι δεκάκις χιλιοςτυ κ.υ.κ.

Στις περιπτόςις τις διέρεςις με δεδομένι προςένκιςι εφαρμόζυμε μερικες ςιντομίες.

2. Να βρεθι το πιλίκο: 93 : 11 κατα προςένκιςι δέκατυ.

Λίςι

$$\begin{array}{r|l} 93 & 11 \\ -88 & 8,45... \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \end{array}$$

Το πρότο πςιφίο μετα το κόμα τυ πιλίκυ ίνε το 4. Αλα αν εκςακολυθάμε τι διέρεςι τότε τα ακόλυθα πςιφία τυ πιλίκυ θα ίνε 545. Αφτο δίχνι, πος ακριβέςτερο πςιφίο απ' το 4 δέκατα ίνε να πάρυμε τα 5 δέκατα.

Σ ι μ ί ο ς ι. Δεν ίνε ανάνκι να βρίςκυμε το ακόλυθο πςιφίο τυ πιλίκυ, αρκι να ςινκρίνυμε το ιπόλιπο με τον διερέτι, κι αν αφτος ίνε μεγαλίτερος τυ μιςυ τυ διερέτι, τότε το ακόλυθο πςιφίο τυ πιλίκυ θα ίνε μεγαλίτερο τυ 5.

Οταν βρίςκυμε το τελεφτέο κατα προςένκιςι πςιφίο τυ πιλίκυ πρέπι να ςινκρίνυμε το ιπόλιπο με τον διερέτι, κε, αν το ιπόλιπο ίνε ίςο με το μιςο τυ διερέτι, ίτε μεγαλίτερο απ' αφτο τότε μεγαλόνυμε το τελεφτέο πςιφίο τυ πιλίκυ κατα μια μονάδα, αν όμος ίνε μικρότερο απ' το μιςο τυ διερέτι, τότε τον απορίπτυμε χορις να μεταβάλυμε το πιλίκο.

3. Τα αμεριχάνικα τεζάκια τον μιχανον ίνε καταςκεβαζμένα ςίμφονα με το ανγλικο μετρικο ςίςτιμα, όπυ μικρα μάκρι μετριόντε με ντιύιμες (1 ντιύιμα = **25,4 μμ**).

Να τραπυν ςε μιλίμετρα τα $\frac{5}{64}$ τις ντιύιμας.

$$25,4\cdot\frac{5}{64}=\frac{25,4\cdot 5}{64}=\frac{127}{64}\text{ μμ.}$$

Τρέποντας τον $\frac{127}{64}$ ςε δεκαδικο κλάζμα βρίςκυμε 1,984375 **μμ.**

Ι εργαςία τυ τεζακιυ επιτρέπι ακρίβια μονάχα κατα προςένκιςι εκατοςτον τυ μιλιμέτρυ. Διερόντας τον 127 δια τυ 64, πρέπι να ςταματίςυμε τι διέρεςι τότε όταν ςτο πιλίκο θα βρίςκυμε εκατοςτα κε τότε ι απάντιςι ςτο πρόβλιμα θα ίνε 1,98 **μμ.**

Οπος φένετε απο το παράδιγμα αφτο, ο αριθμος τον δεκαδικον πςιφίον τυ κλάζματος καθορίζετε απο τις τεχνικες ςινθίκες. Οταν ένα κινο κλάζμα μετατρέπυμε ςε τέλιο δεκαδικο, πρέπι να περιορίςυμε τον αριθμο τον δεκαδικον πςιφίον, ςίμφονα με τυς όρυς τυ προβλίματος.

Πρέπι να δόςυμε προςοχι ςτις ιδιότιτες τις διέρεςις, πυ δίνι πιλίκο απεριόριςτο κλάζμα. Ι απεριόριςτι διέρεςι πάντα δίνι ιπόλιπα, πυ επαναλαβένυντε. Κε πραγματικα κατα τιν απεριόριςτι διέρεςι δεν ίνε δινατο όλο τον χερο να έχυμε διάφορα ιπόλιπα, γιατι κάθε νέο ιπόλιπο πρέπι να ίνε μικρότερο τυ διερέτι, ενο ο αριθμος τον ιπολίπον αφτον ίνε περιοριζμένος.

Σ' ένα απο τα παραδίγματα έχυμε 2:11=0,1818... επιδι ο διερέτις στο παράδιγμα αφτο ίνε 11, γι' αφτο θα μπορύσαμε να έχυμε στο ιπόλιπο τυς αριθμυς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — το όλο δέκα διάφορα ιπόλιπα. Μα άμα τελιόσυμε τα ιπόλιπα αφτα κάνοντας ακατάπαφτα διέρεσι, εχσάπαντος κάπιο απ' αφτα θα χσαναέρχονταν στο ιπόλιπο κε απο δο όλα τα άλα ιπόλιπα πρέπι να επανολιφθυν με τι σιρά-τυς.

Στο παράδιγμά-μας ι επανάλιπσι αρχίζι απο το ιπόλιπο 2.

Ι επανάλιπσι τυ ιπόλιπυ επιρεάζι το πιλίκο: κε στο ιπόλιπο χσανα βρίσκυμε τα ίδια πσιφία, τα οπία ίχαμε προτίτερα, κε, με τιν ίδιατυς σιρα. Αν τα ιπόλιπα επαναλοβένυντε κάμποσες φορες, τότε τόσες φορες περιοδικα επαναλαβένυντε κε τα πσιφία τυ πιλίκυ. Ι ομάδα τον πσιφίον τυ πιλίκυ, πυ επαναλαμβένυντε κατα τιν ατέλιοτι διέρεσι ονομάζετε *π ε ρ ί ο δ ο ς*, κε το απεριόριστο δεκαδικο κλάζμα, πυ βρίκαμε στο πιλίκο απο τι διέρεσι αφτι ονομάζετε *π ε ρ ι ο δ ι κ ο κ λ ά ζ μ α*.

Στο πιλίκο-μας $\frac{2}{11}=0{,}18\ldots$ βρίσκυμε περιοδικο κλάζμα με περιοδο «18». Ι περίοδος αφτι αποτελίτε απο δίο πσιφία.

Οριζμος. **Εαν στο απεριόριστο δεκαδικο κλάζμα, αρχίζοντας απο κάπιο δεκαδικο πσιφίο, ο σινδιαζμος κάμποσον αριθμον επαναλαβένετε ατέλιοτες φορες με τιν ίδια σιρα, τότε, τέτιο δεκαδικο κλάζμα ονομάζετε απεριόριστο περιοδικο κλάζμα.**

Το περιοδικο κλάζμα σιμιόνετε με αποσιοπιτικα, πυ γράφυνε μετα τιν περίοδο.

Ετσι, 1) $\frac{2}{11}=0{,}1818\ldots$ περίοδος ίνε τα πσιφία 1 κε 8 (ο αριθμος 18).

2) Το κλάζμα $\frac{5}{12}=0{,}41666\ldots$

Τρέποντας το $\frac{5}{12}$ σε δεκαδικο, βρίκαμε απεριόριστο περιοδικο κλάζμα. Περίοδος ίνε το πσιφίο 6.

Για να μάθυμε, πια κινα κλάζματα τρέπυντε σε περιοριζμένο δεκαδικο, πια — σε απεριόριστο, ας εχσετάσυμε ένα ακόμα τρόπο μετατροπις κινυ κλάζματος σε δεκαδικο. Ο τρόπος αφτος έχι βάσι τιν αναζίτισι τιύτον σιμπλιρωματικον παραγόντον για τον αριθμιτι κε παρονομαστι τυ κλάζματος, ι οπίι μετατρέπυν τον παρονομαστι τυ κλάζματος σε αριθμο, πυ παραστένι τι μονάδα με τα μιδενικα.

Τον τρόπο αφτο εφαρμόζυν μονάχα στα ανάγωγα κλάζματα διλ. σε κίνα τα κλάζματα, τον οπίον ο αριθμιτις κε παρονομαστις έγιναν πρότι αριθμι, ίστερα απο όλες τις δινατες απλοπιίσις.

4. Να τραπυν σε δεκαδικο, τα ακόλυθα κινα κλάζματα.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{125},\ \frac{3}{250},\ \frac{7}{500},\ \frac{11}{40}.$$

Λ ί σ ι.

$$\frac{1}{2}=\frac{5.1}{5.2}=\frac{5}{10}, \qquad \frac{1}{5}=\frac{2.1}{2.5}=\frac{2}{10},$$

$$\frac{1}{4}=\frac{25.1}{25.4}=\frac{25}{100}, \qquad \frac{1}{25}=\frac{4.1}{4.25}=\frac{4}{100},$$

$$\frac{1}{8}=\frac{125.1}{125.8}=\frac{125}{1000}, \qquad \frac{1}{125}=\frac{8.1}{8.125}=\frac{8}{1000}.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκυνε τυς σιμπλιροματικυς παράγοντες κε τον κλαζμάτον $\frac{3}{250}, \frac{7}{500}, \frac{11}{40}.$

Ο τρόπος αφτος τις τροπις κινυ κλάζματος σε δεκαδικο εφαρμόζετε μόνον τότες, όταν ο παρονομαστις τυ κινυ κλάζματος ίνε γινόμενο τυ 2 κε 5, σε οπιαδίποτε δίναμι.

Για άλες περιπτόσις ο τρόπος αφτος δεν εφαρμόζετε. Ας το αποδίχσυμε με παράδιγμα.

5. Να τραπυν σε δεκαδικο το $\frac{2}{3}$ κε το $\frac{5}{12}$.

Λ ί σ ι 1) $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$ 2) $\frac{5}{12}=0{,}41666\ldots$

Σ'αφτα τα παραδίγματα το πιλίκο έχι μορφι περιοδικυ κλάζματος.

Εφκολα μπορύμε να καταλάβυμε, γιατι δεν ίνε δινατο κάθε κινο κλάζμα να τρέπσυμε ακριβος σε δεκαδικο.

Εαν στον παρονομαστι τυ ανάγογυ κλάζματος ιπάρχυν άλι οπιοδίποτε πρότι παράγοντες, εκτος απ' το 2 κε το 5, τότε απο τιύτο κλάζμα δεν ίνε δινατο να πάρυμε κλάζμα με παρονομαστι 10, 100, 1 000.

Τα κλάζματα $\frac{2}{3}$ κε $\frac{5}{12}$ δεν ίνε δινατο να τρέπσυμε ακριβος σε δεκαδικα κλάζματα. Δεν μπορύμε να διαλέχσυμε περιοριζμένο αριθμο, πυ πολαπλασιαζόμενος επι τον 3 να δόσι 10, 100, 1000 κ. τ. λ. το ίδιο παρατιρύμε κε στα κλάζματα.

$$\frac{5}{12}=\frac{5}{2.2.3}=\frac{5.5.5}{2.2.5.5.3}=\frac{125}{100.3}.$$

Εδο δεν μπορύμε να βρίσκυμε τον χριαζόμενο παράγοντα για το 3.

Ι. Εαν ο παρονομαστις μι απλοπιιμένυ κλάζματος, όταν τον αναλίυμε στυς πρότυς παράγοντες, δίνι γινό-

μενο, αποτελύμενο μονάχα απο το 2 κε 5, τότε τέτιο κλάζμα μπορι να τραπι ακριβος ςε περιοριζμένο δεκαδικο κλάζμα.

II. Εαν ο παρονομαςτις μι απλοπιιμένυ κλάζματος, κατα τιν ανάλιςί-τυ ςτυς πρότυς παράγοντες δίνι γινόμενο όχι απο 2 κε 5 ίτε τέτιο ςτο οπίο εχτος τον 2 κε 5 περιέχοντε κε άλι παράγοντες, τότε το κλάζμα αφτο δεν ίνε δινατο να τραπι ςε περιοριζμένο δεκαδικο κλάζμα.

§ 4. Πράκςις με κινα κε δεκαδικα κλάζματα ταφτόχρονα.

Τις πράκςις αφτες, τις οπίες κάνυμε ςινάμα με κινα κε δεκαδικα κλάζματα εφαρμόζυμε κιρίος όταν έχυμε να κάνυμε πολίπλοκυς λογαριαζμυς· τότε μπορύμε όλα τα δεκαδικα να τρέπςυμε ςε κινα (απλα) κε να κάνυμε πράκςις πάνο ςε κινα κλάζματα. Μπορύμε κε αλιότικα: όλα τα κινα κλάζματα να τα τρέπςυμε ςε δεκαδικα κε νἄχυμε να κάνυμε μονάχα με δεκαδικα κλάζματα.

Στιν πραχτικι όμος τέτιες απλοπίιςις δεν οφελυν πάντα, κάποτε ίνε οφιλιμότερο να αφίςυμε κινα κε δεκαδικα όπος ίνε.

Παραδίγματα. 1) Ας πολαπλαςιάςυμε $0,0028 . \frac{4.}{7}$

$$0,0028 \cdot \frac{4}{7} = \frac{0,0028 . 4}{7} = 0,0004 . 4 = 0,0016.$$

Κατα τι λίςι τυ παραδίγματος αφτυ αφίςαμε το κινο κλάζμα. Ι τροπι τυ $\frac{4}{7}$ ςε δεκαδικο κλάζμα θα μας έφερνε ςτυς κατα προςένκιςι αριθμυς.

2) Να βρεθι το πιλίκο $\frac{11}{15} : 2,64.$

Λ ί ς ι. Διερύμε δια 2,64 ςίμφονα με τον κανόνα διέρεςις δι' ακέρεο αριθμο:

$$\frac{11}{15} : 2,64 = \frac{11}{15 . 2,64} = \frac{11 . 100}{15 . 264} = \frac{100}{15 . 24} = \frac{100}{360} = \frac{5}{18}.$$

3) Να πολαπλαςιαςθυν $0,753 . \frac{12}{251}.$

Πολαπλαςιάζυμε ςίμφονα με τον κανόνα τυ πολαπλαςιαζμυ ακέρεο αριθμο επι κλάζμα:

$$0,753 . \frac{12}{251} = \frac{0,753 . 12}{251} = \frac{753 . 12}{1000 . 251} = \frac{3 . 12}{1000} = \frac{36}{1000} = 0,036.$$

Εδο πολαπλαςιάζυμε κε διερύμε τα δεκαδικα κλάζματα, όπος κε τυς ακέρευς αριθμυς.

Ι τροπι τον δεκαδικον ςε κινα κλάζματα ίνε προτιμότερι τότε, όταν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε κινα ίτε δεκαδικα κλάζματα μαζι.

Στις περιπτόςις όμος τις πρόςθεςις κινυ κε δεκαδικυ κλάζματος, καθος κε κατα τιν αφέρεςί-τυς, μονάχα μικρα δεκαδικα κλάζματα τρέπυν ςε κινα. Στις πιο πολίπλοκες περιπτόςις ίνε προτιμότερο να τρέπςυμε το κινο κλάζμα ςε δεκαδικο.

$$4) \quad \frac{2}{7} + 0,3 - \frac{1}{4} = \frac{2}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{40 + 42 - 35}{140} = \frac{47}{140}.$$

5) Να διεκςαχτυν ι πράκςις $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{5} . 0,48 : 0,125.$

Λ ί ς ι.

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{5} . 0,48 : 0,125 = \frac{7 . 3 . 48 . 1000}{12 . 5 . 125 . 100} = \frac{7 . 3 . 4 . 10}{5 . 125}.$$

Για να γίνι ι λίςι πιο απλι πολαπλαςιάζυμε τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι επι 2 κε 8, γιατι ο πολαπλαςιαςτις 2 κατα τον πολαπλαςιαζμο επι τον πολαπλαςιαςτι 5 δίνι παρονομαςτι 10, ο δε πολαπλαςιαςτις 8 πολαπλαςιαζόμενος επι 125 δίνι παρονομαςτι 1000.

$$\frac{2 . 8 . 7 . 3 . 4 . 10}{5 . 2 . 125 . 8} = \frac{2 . 8 . 7 . 3 . 4 . 10}{10 . 1000}.$$

Βρίκαμε πιο απλι παράςταςι, πυ μετα τιν απλοπίιςι δίνι τέτιο εκςαγόμενο:

$$\frac{2 . 8 . 7 . 3 . 4}{1000} = \frac{1344}{1000} = 1,344.$$

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν ςτον παρονομαςτι τυ εβριςκόμενυ κλάζματος ιπάρχυν παράγοντες 5 · 25 · 125, τότε ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις τυ εβριςκόμενυ κλάζματος πρέπι αντίςτιχα να πολαπλαςιαςτυν επι 2, 4, 8.

$$6) \quad \frac{11}{13} + 8,823 + \frac{1}{50} \simeq 0,846 + 8,823 + 0,020 \simeq 9,689.$$

Π α ρ α τ ί ρ ι ς ι Ι. Οταν ςιναντιόντε κε κινα κε δεκαδικα κλάζματα ςτις πράκςις-μας, τότε κατα τιν τροπι τυ κινυ κλάζματος ςε δεκαδικο κε κατα τιν ςτρονκίλοςί-τυ πρέπι να πάρυμε τόςα δεκαδικα πςιφία όςα ιπάρχυν ςτα δεδομένα κλάζματα.

Σ ι μ ί ο ς ι. ΙΙ. Σε περίπτοςι πρόςθεςις κε αφέρεςις αριθμον κατα προςένκιςι, όλι ι προςθετέι, ο μιοτέος κε ο αφερετέος, πρέπι νἄχυν ίδιο αριθμο πςιφίον μετα τιν ιποδιαςτολι.

Σ ι μ ί ο ς ι ΙΙΙ. Κατα τον πολαπλαςιαζμο κε τι διέρεςι αριθμον κατα προςένκιςι, όλι ι παράγοντες, το γινόμενο, ο διερετέος, διερέτις κε το πιλίκο πρέπι νἄχυν ίδιο αριθμο πςιφίον ςτο ςιμαντικο μέρος-τυς.

$$7) \quad \frac{3}{7} \cdot 0,51 \simeq 0,43 . 0,51 \simeq 0,22.$$

8) $\frac{111}{115}.0,376 \approx 0,965.0,376 \approx 0,363.$

9) $5,73.28,1 \approx 57,3:281 \approx 0,204.$

XIV. ΛΟΓΙ ΚΕ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ.

§ 1. Δίο τρόπι σίνκρισις τον αριθμον.

Ιπάρχυν δίο τρόπι σίνκρισις τον αριθμον.

1. Το γραφίο τον ικοδομον πλίροσε στο τυβλο-εργοστάσιο για διο παρτίδες τύβλα 4800ρ. κε 1200ρ. Να σινκριθυν αφτι ι αριθμι.

Λ ί σ ι. Μπορύμε να δόσυμε διο απαντίσις: 1) μπορύμε να πύμε πος για τιν πρότι παρτίδα πλιρόσανε 3600 ρ. περισότερο, παρα για τι δέφτερι παρτίδα· 2) μπορύμε να πύμε επίσις, πος για τιν πρότι παρτίδα πλιρόσανε 4 φορες περισότερο, παρα για τι δέφτερι. Κε στις διο περιπτόσις έχυμε λόγο δίο ομοιδον μεγεθον.

Στιν πρότι περίπτοσι σινκρίναμε τυς αριθμυς με τιν αφέρεσι, στι δέφτερι περίπτοσι — με τι διέρεσι. Το πρότο αποτέλεζμα ονομάζυν λόγο τις διαφορας, το δέφτερο πολαπλάσιο λόγο.

Ο λόγος τις διαφορας ίνε αποτέλεζμα τις σίνκρισις δίο αριθμον μέσον τις αφέρεσις, π.χ. 25 εκμ. τ. — 10 εκμ. τ. = 15 εκμ. τ.

Ο πολαπλάσιος λόγος ίνε αποτέλεζμα τις σίνκρισις δίο αριθμον μέσον τις διέρεσις. Στον λόγο αφτο αναλογι αριθμος ακέρεος ίτε κλαζματικος.

Παράδιγμα: 1) $\frac{210}{35} = 6$, 2) $\frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$

Σε κάθε λόγο έχυμε διο αριθμυς, τυς οπίυς σινκρίνυμε. Ι αριθμι αφτι ονομάζοντε όρι τυ λόγυ.

Ο πρότος αριθμος ίνε — ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο δέφτερος αριθμος — επόμενος όρος τυ λόγυ.

Γραφι το λόγο τις διαφορας με τα γράματα τυ αλφάβιτυ: $a - b = d$.

Εδο ο a ίνε ο ιγύμενος όρος τυ λόγυ, ο b — ο επόμενος κε το $(a - b)$ κε το d ίνε κε ι διό-τυς λόγος τις διαφορας.

Γραφι τυ πολαπλάσιυ λόγυ με γράματα: $a : b = q$ ίτε $\frac{a}{b} = q$.

Σ' αφτο το παράδιγμα ο a ίνε ο ιγύμενος όρος, ο b ο επόμενος όρος. $\frac{a}{b}$ κε q ίνε κε ι διό-τυς πολαπλάσιος λόγος.

§ 2. Πολαπλάσιος λόγος.

1. Το χτίσιμο τον τίχον σ' ένα ικοδόμιμα κόστισε 40 000. Κατα τιν ελάτοσι τυ πάχυς τυ τίχυ ελαφρυ τίπυ ικοδομίματος το χτίσιμο κόστισε 20 000 ρύβλια.

Πόσες φορες λιγόστεψε ι αξία τον τίχον τυ ελαφρυ τίπυ.

Λ ί σ ι. Πρέπι να μάθυμε πόσες φορες ακριβότερα κόστιζαν ι τίχι τυ βαριυ τίπυ ικοδομίματος απο τυς τιχυς τυ λαφρυ τίπυ.

Για τι λίσι τυ προβλίματος τύτυ πρέπι να σινκρίνυμε τυς αριθμυς. Με τι διέρεσι βρίσκυμε τιν ακόλυθι αναλογία:

$\frac{40\,000}{20\,000} = 2.$ *Απάντισι:* κατα 2 φορες.

Ιταν δινατο να μπι το ζίτιμα κλιότικα: πιο μέρος τις αξίας, πυ ορίστικε στιν αρχι αποτελι ι αξία τυ τίχυ τυ ελαφρυ τίπυ;

Κατα τιν λίσι τυ προβλίματος όπος ίνε πρέπι να ανταλάξυμε τις θέσις τυ λόγυ.

$\frac{20\,000}{40\,000} = \frac{1}{2}.$ *Απάντισι:* $\frac{1}{2}$.

Ο δέφτερος λόγος έχι παρασταθι με αριθμο, αντίθετο τυ προιγύμενυ.

I. Ο λόγος τυ μεγαλίτερυ αριθμυ προς τον μικρότερο δίχνι, πόσες φορες ο πρότος αριθμος ίνε μεγαλίτερος τυ δεφτέρυ.

II. Ο λόγος τυ μικρότερυ αριθμυ πρός τον μεγαλίτερο δίχνι, πόσο μέρος τυ μεγαλίτερυ αριθμυ αποτελι ο μικρότερος αριθμος.

III. Κατα τιν ανταλαγι τον θέσεον τυ λόγυ σχιματίζετε νέος λόγος, αντίστροφος τυ πρότυ.

§ 3. Ι κιριότερι ιδιότιτα τυ πολαπλάσιυ λόγυ.

Στο κεφάλεο για τις ιδιότιτες τον κλαζμάτον εκσακριβόσαμε, πος το πιλίκο, το κλάζμα κε ο λόγος μπορύμε να εκσετάσυμε ος αποτέλεζμα μιας κε τις αφτις πράξις — τις διέρεσις. Γι' αφτο τις ιδιότιτες κλάζματος κε τις ιδιότιτες τυ πιλίκυ μπορύμε να αναφέρυμε κε στο λόγο.

Ας απαριθμίσυμε τις ιδιότιτες αφτες.

I. Οσες φορες μεγαλόνυμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, τόσες φορες μεγαλόνι κε ο λόγος. Οσες φορες ελατόνυμε τον ιγύμενο όρο, τόσες φορες ελατόνι κε ο λόγος.

II. Οσες φορες μεγαλόνυμε τον επόμενο όρο τυ λόγυ τόσες φορες ελατόνετε κε ο λόγος. Οσες φορες ελατόνυμε τον επόμενο όρο, τόσες φορες μεγαλόνι κε ο λόγος.

Π.χ., αφκσένοντας τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ $\frac{80}{20} = 4$ σε 3 φορες, θα έχυμε νέο λογο: $\frac{240}{20} = 12$, πυ θα ίνε τρις φορες μεγαλίτερος

τυ προιγύμενυ· μεγαλόνοντας τον επόμενο όρο τυ ίδιυ λόγυ 2 φορες, θα έχυμε το λόγο: $\frac{80}{40}=2$, πυ ίνε 2 φορες μικρότερος τυ αρχικυ.

Ετςι επίςις ίνε ςοςτο κε για το λόγο ι χιριότερι ιδιότιτα τυ κλάζματος. Εμις ας τιν ονομάςυμε χιριότερι ιδιότιτα τυ λόγυ.

III. Εαν πολαπλαςιάζυμε ίτε διερύμε, ςινάμα κε τυς όρυς τυ λόγυ με έναν κε τον ίδιο αριθμο, αλάζι μονάχα ι μορφι τυ λόγυ, ενο ι αριθμιτικι ακςία τυ λόγυ δεν μεταβάλετε.

Π.χ., ο λόγος $\frac{6\,000\,000\,000}{2\,000\,000\,000}=\frac{6}{2}=3.$

Ας ςιμιόςυμε κε μια ακόμα ιδιότιτα τυ λόγυ.

Ας πάρυμε το λόγο: $\frac{12}{4}=3.$

Ας παραςτίςυμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, με τον επόμενο κε με το μέγεθος τυ λόγυ, κατα τον κανόνα: ο διερετέος ιςύτε με τον διερέτι επι το πιλίκο.

$$12=4.3.$$

Εδο θα βρίςκυμε τον ιγύμενο όρο τυ λόγυ, κςέροντας το μέγεθος τυ λόγυ κε τον επόμενο όρο-τυ. Γράφοντάς-το θα έχυμε:

Ιγύμενος όρος = επόμενος όρος x μέγεθος τυ λόγυ.

Τιν ιδιότιτα θα τιν λέμε προφορικα έτςι:

IV. Ο ιγύ μενος όρος τυ πολαπλάςιυ λόγυ ιςύτε με τον επόμενο, πολαπλαςιαςμένο επι το μέγεθος τυ λόγυ.

§ 4. Εβρεςι τυ άγνοςτυ όρυ τυ λόγυ.

Ι ιδιότιτες τυ λόγυ μας διεφκολίνυν να βρίςκυμε τον άγνοςτο όρο τυ λόγυ, αν ίνε γνοςτι, ο άλος όρος τυ λόγυ κε το μέγεθος τυ λόγυ.

1. $\frac{x}{3}=5$. Εδο ο άγνοςτος ίνε ο ιγύμενος όρος τυ λόγυ διλαδι ο διερετέος. Θα έχυμε:

$$x=3.5=15.$$

2. $\frac{72}{x}=4$. Εδο ο άγνοςτος ίνε ο διερετέος, ο οπίος ίνε κε ο επόμενος όρος τυ λόγυ. Θα έχυμε:

$$x=\frac{72}{4}=18.$$

§ 5. Απλοπίιςι τις πράκςις για ιν έβρεςι τυ λόγυ κε αντικατάςταςι τυ λόγυ τον κλαςματικον αριθμον δια τυ λόγυ τον ακέρεον αριθμον.

1. Απλοπίιςι τον λόγον. Ι χιριότερι ιδιότιτα τυ λόγυ μας επιτρέπι να κάνυμε πιο απλο το λόγο κε να απλοπιίςυμε τυς όρυς τυ λόγυ.

1) Να βρεθι ο λόγος τον αριθμον 17 200 κε 1290.

Λ ί ς ι.

$$\frac{17\,200}{1290}=\frac{1720}{129}=\frac{40}{3}.$$

Με τι διέρεςι απλοπιίςαμε τον ιγύμε ο κε τον επόμενο όρο τυ λόγυ δια 10 κε έπιτα δ α 43.

Αν ο ιγύμενος κε επόμενος όρος τυ πολαπλάςιυ λόγυ έχυν κινο πολαπλαςιαςτι, τότε μπορύμε κε τυς δίο όρυς τυ λόγυ να απλοπιίςυμε δια τυ πολαπλαςιαςτι τύτυ.

II. Αντικατάςταςι τον κλαςματικον αριθμον ςτυς λόγυς.

2. Να βρεθι ο λόγος τον αριθμον:

1) 40,5 : 15,3 2) $2\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$.

Λ ί ς ι.

1) $40{,}5:15{,}3=\frac{40{,}5}{15{,}3}=\frac{405}{153}=\frac{45}{17}=45:17,$

2) $2\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{5}{2}:\frac{3}{4}=\frac{5.4}{2.3}=\frac{10}{3}=10:3.$

Στα παραδίγματα αφτα, διερόντας κε απλοπιόντας τα κλάςματα, αντικαθιςτύμε το λόγο τον κλαςματικον αριθμον δια τυ λόγυ τον ακέρεον αριθμον.

Για να βρίςκυμε το λόγο κλαςματικον αριθμον, πρέπι να τρέψυμε αφτυς ςε ομόνιμα, να απορίψυμε τυς παρονομαςτες κε να πάρυμε το λόγο τον αριθμιτον.

1) Ο λόγος 5,9 : 4,7 = 59 : 47,

2) ο λόγος 4,13 : 2,5 = 413 : 250.

§ 6. Ενια αναλογιον.

Οριςμος. **Διο ίςι (πολαπλάςιι) λόγι ενομένι με το ςιμίο τις ιςότιτας, αποτελυν πολαπλάςιο αναλογία.**

Σ ι μ ί ο ς ι. Τιν πολαπλάςιο αναλογία θα ονομάςυμε απλύςτατα αναλογία

Πρόβλιμα. Ενα ταχιδρομικο τρένο πέραςε ςε 6 όρες 180 χμ.

κε εκςακολυθόντας το δρόμο-τυ πέραςε 90 χμ ςε 3 όρες. Αλακςε ι ταχίτιτα το τρένυ ίτε όχι;

Λ ί ς ι. Το πρότο μέρος τυ δρόμυ το τρένο πίγε με ταχίτιτα $\frac{180}{6}=30$ χμ τιν όρα. Τον ίδιο δρόμο πέραςε κε τι δέφτερι φορα $\frac{90}{3}=30$ χμ τιν όρα. Ι ταχίτιτα τυ τρένυ δεν άλακςε. Στο πρόβλιμα αφτο ο λόγος $\frac{180}{6}=30$ κε ο λόγος $\frac{90}{3}=30$ ίνε ίςι.

Ι ιςότιτα τον λόγον $\frac{180}{6}=\frac{90}{3}$ ςχιματίζι αναλογία.

Ι αναλογία αφτι διαβάζετε έτςι: 1) ο 180 αναφέρετε προς τον 6, όπος ο 90 προς τον 3, ίτε: 2) ο λόγος τυ 180 προς τον 6 ίνε ίςος προς τον λόγο τυ 90 προς τον 3, ίτε: 3) το 180 ίνε τόςες φορες περιςότερο απο το 6, όςες φορες το 90 ίνε μεγαλίτερο τυ 3.

Ι γραφι με γράματα θα ίνε: $a:b=c:d$, ίτε $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Καθένας όρος τις αναλογίας έχι τιν ονομαςία-τυ: ο a κε ο d ονομάζοντε άκρι όρι τις αναλογίας, ο b κε ο c — μέςι όρι τις αναλογίας.

Ι αριθμι, με τυς οπίυς μπορύμε να ςχιματίζυμε αναλογία ονομάζοντε ανάλογι αριθμι.

§ 7. Ι κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

1. Αγοράςαμε 10 μ ίφαςμα προς 20 ρύβλια το μέτρο. Πόςα μέτρα ίφαςμα μπορύμε να αγοράςυμε με τα ίδια χρίματα προς 5 ρυβ. το μέτρο;

Λ ί ς ι. 10 . 20=200 ρ. 200 : 5=40 μ.

Με 200 ρύβλια μπορύμε να αγοράςυμε 40 μ προς 5 ρυβ.

Αν θα ςινκρίνυμε το ποςο τον μέτρον κε τιν ακςία κε ςτις διο περιπτόςις, τότε θα έχυμε τιν αναλογία $\frac{40}{10}=\frac{20}{5}$, επιδι ι λόγι τον αριθμον ίνε ίςι. Ι αριθμι αφτι ςχιματίζυν αναλογία. Σινάμα κε τα γινόμενα (έπρεπε να κςοδέπςυμε ένα κε το αφτο ποςο) διλ. 40 . 5 κε το 20 . 10 ίνε επίςις ίςα.

Αφτι ίνε ι κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

Το γινόμενο τον μέςον όρον τις αναλογίας ιςύτε με το γινόμενο τον άκρον όρον.

2. Ας ςχιματίςυμε αναλογία με τυς αριθμυς 20, 4, 15, 3 κε ας δοκιμάςυμε τιν κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας.

Λ ί ς ι. Σχιματίζυμε ίςυς λόγυς: $\frac{20}{4}=5$, $\frac{15}{3}=5$.

Αναλογία: $\frac{20}{4}=\frac{15}{3}$, 20 . 3=15 . 4.

Τιν κιριότερι ιδιότιτα αφτι μπορύμε να παραςτίςυμε κε με γράματα.

Εαν $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, τότε πολαπλαςιάζοντας καθένα απ' τυς λόγυς αφτυς επι το bd θα έχυμε: $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$ ίνε κατα τιν απλοπίιςι: $ad=bc$.

§ 8. Σχιματιζμος αναλογίον με δεδομένυς αριθμυς.

1. Να ςχιματιςτι αναλογία απο τυς αριθμυς 20, 12, 10, 6 κε να γίνι ι δοκιμί-τυς.

Λ ί ς ι. 1) Για να λίςυμε τις αναλογίες κατατάςυμε τυς αριθμυς κατα ςιρα κε κατα το μέγεθός-τυς 20, 12, 10, 6.

Ας ςχιματίςυμε αναλογία:

20 : 12 = 10 : 6.

Κε ι διο λόγι ίνε ίςι κε ιςοδίναμι με το $\frac{5}{3}$.

2. Ας δοκιμάςυμε αν ίνε ςοςτι ι αναλογία αφτι εφαρμόζοντας τιν κιριότερι ιδιότιτα.

20 . 6 = 12 . 10.

Το γινόμενο τον άκρον όρον ιςύτε με το γινόμενο τον μέςον όρον κε ιςοδιναμι με 120. Ι αναλογία ίνε ςοςτι. Ι αριθμι 20, 12, 10, 6 ίνε ανάλογι.

3. Ινε άραγε δινατο να ςχιματίςυμε αναλογία με τυς αριθμυς 25, 10, 8, 4; Αν θα γράπςυμε το λόγο 25 : 10 κε το λόγο 8 : 4 τοτε δε γίνετε να γράπςυμε αναμετακςί-τυς το ςιμίο τις ιςότιτας κε το γινόμενο τον άκρον όρον 25.4 δεν ιςύτε με το γινόμενο τον μέςον όρον 10 . 8.

Ι αριθμι 25, 10, 8 κε 4 δεν ίνε ανάλογι.

Ας ιποδίκςυμε τον κανόνα κε τυς όρυς τυ ςχιματιζμυ αναλογίας με τυς δεδομένυς τέςαρες αριθμυς.

I. Αν το γινόμενο διο αριθμον ιςύτε με το γινόμενο τον δίο άλον αριθμον, τότε ι τέςαρες αφτι αριθμι ίνε ανάλογι.

II. Κατα τον ςχιματιζμο αναλογίας, τυς αριθμυς τυ ενος γινομένυ πρέπι να τυς κάνυμε άκρυς όρυς τις αναλογίας, τυς αριθμυς τυ άλυ — μέςυς.

2. Να ςχιματιςτι αναλογία με τυς τέςαρες αριθμυς 8 κε 5, 2 κε 20.

Τα γινόμενα αφτον τον αριθμον ανα δίο ίνε ίςα:

8 . 5 = 2 . 20.

Θα γίνι τέτια αναλογία:

20 : 8 = 5 : 2.

Ι όρι 8 κε 5 ίνε μέςι όρι. Ι όρι 2 κε 20 ίνε άκρι

§ 9. Ανταλαγι τον θέςεον τον όρον τις αναλογίας.

I. Στιν αναλογία μπορύμε να ανταλάκςυμε τις θέςις τυ πρότυ κε τυ δέφτερυ λόγυ.

Εχυμε τις αναλογίες.

1) $18 : 15 = 6 : 5.$

2) $6 : 5 = 18 : 15.$

Ι δέφτερι αναλογία ςχιματίςτικε απο τιν πρότι με τιν ανταλαγι τις θέςις τον λόγον. Ι ιςότιτα φὲνετε πος διαφιλάτετε.

Ι δοκιμι με τον πολαπλασιαζμο τον άκρον κε τον μέςον όρον τις αναλογίας επίςις δίχνι, πος ι αναλογίες αφτες ίνε ςχιματιζμένες ςοστα.

$$5 . 18 = 6 . 15.$$

II. Στιν αναλογία μπορύμε να ανταλάκςυμε τις θέςις τον άκρον όρον ίτε τις θέςις τον μέςον όρον.

Ας δοκιμάςυμε αν αλιθέβυν ι αναλογίες:

1) $20 : 16 = 5 : 4,$ 2) $20 : 5 = 16 : 4,$ 3) $4 : 16 = 5 : 20.$

Ι δέφτερι αναλογία ςχιματίςτικε απο τιν πρότι με τιν αλαγι τις θέςις τον μέςον όρον: ο 5 πίγε ςτι θέςι τυ 16, κε ο 16 ςτι θέςι τυ 5. Ι τρίτι αναλογία ςχιματίςτικε απο τιν πρότι με τιν ανταλαγι τις θέςις τον άκρον όρον: ο 4 έπιαςε τι θέςι τυ 20 κε ο 20 τι θέςι τυ 4.

Τα γινόμενα τον άκρον κε μέςον όρον ς' όλες αφτες τις αναλογίες δεν άλακςαν αλα έμιναν ίςα. Ι αναλογίες αφτες ςχιματὶςτικαν ςοστα.

III. Τυς λόγυς τον αναλογιον μπορύμε να αντικαταςτίςυμε με τυς αντίςτροφυς λόγυς.

Οπος φένετε ς' αφτι τιν περίπτοςι ι ιςότιτα δε χαλνα. Ετςι π.χ. τιν αναλογία $20 : 16 = 5 : 4$ μπορύμε να τιν αντικαταςτίςυμε με ὰλι, πυ προκίπτι απο τιν μετάθεςι τον ιγύμενον κε τον επόμενον όρον κάθε λόγυ: $16 : 20 = 4 : 5$. Τα γινόμενα τον μέςον κε άκρον όρον κε ςτις διο αναλογίες ίνε ίςα. Κε ι διο αναλογίες έχυν ςχιματιςτι ςοστα. Ι λόγι τις δέφτερις αναλογίας θἄνε αντὶςτροφι με τυς λόγυς τις πρότις αναλογίας. Ι μέςι όρι τις πρότις αναλογίας έγιναν άκρι ςτι δέφτερι κε τανάπαλι: ι άκρι όρι τις πρότις αναλογίας έγιναν μέςι ςτι δέφτερι.

Για να κςέρυμε, πόςες αναλογίες μπορύμε να ςχιματίςυμε απο τυς τέςαρες αριθμυς κε πόςες μεταθέςις επιτρέπι ι αναλογία, πρέπι να αλάκςυμε τις θέςις τον όρον τις αναλογίας, εφαρμὸζοντας όλες τις παραπάνο αλαγες τον θέςεον τον όρον τις αναλογίας. Δίνετε ι αναλογία $60 : 40 = 3 : 2$. Ας κάνυμε ςτιν αναλογία αφτι όλες τις δινατες μεταθέςις για να διατιρίςυμε πάντα τιν ιςότιτα:

$$60 . 2 = 3 . 40$$

Ας μεταθέςυμε τυς μέςυς όρυς τις αναλογίας.

Θα έχυμε:

1) $60 : 40 = 3 : 2,$ 2) $60 : 3 = 40 : 2.$

Αντικαθιςτόντας κε τυς δίο λόγυς τις πρότις κε τις δέφτερις αναλογίας με τυς αντίςτροφυς λόγυς, θα έχυμε:

$$3)\ 40 : 60 = 2 : 3,\ 4)\ 3 : 60 = 2 : 40.$$

Μεταθέτυμε το δέφτερο λόγο ς' ὸλες τις αναλογίες ςτι θέςι τυ πρότυ κε τον πρότο ςτι θέςι τυ δέφτερυ.

Θα έχυμε το όλο οχτο αναλογίες:

1) $60 : 40 = 3 : 2$	5) $3 : 2 = 60 : 40$
2) $60 : 3 = 40 : 2$	6) $40 : 2 = 60 : 3$
3) $40 : 60 = 2 : 3$	7) $2 : 3 = 40 : 60$
4) $3 : 60 = 2 : 40$	8) $2 : 40 = 3 : 60.$

Σ ι μ ί ο ς ι. Σ' όλες αφτες τις αναλογίες τα γινόμενα τον άκρον κε τα γινόμενα τον μέςον ίνε ίςα: $120 = 60 . 2 = 40 . 3$. Το γινόμενο αφτο ίνε το κιριότερο γνόριζμα τις ορθὸτιτας τυ ςχιματιζμυ όλον τον ανολογιον, πυ αποτελὺντε απο τυς τέςαρες δεδομένυς αριθμυς:

$$60, 40, 3, 2.$$

Με τα γρὰματα τυ αλφαβίτυ θα έχυμε:

1) $a : b = c : d$	5) $c : d = a : b$
2) $a : c = b : d$	6) $b : d = a : c$
3) $b : a = d : c$	7) $d : c = b : a$
4) $c : a = d : b$	8) $d : b = c : a.$

§ 10. Εβρεςι ενος αγνόςτυ όρυ τις αναλογίας.

Στιριζόμενι ςτιν κιριότερι ιδιότιτα τις αναλογίας, μπορύμε πὰντοτε να βρίςκυμε έναν απο τυς τὲςαρες όρυς τις αναλογίας όταν δοθυν ι τρις άλι.

1. Να βρεθι ο άγνοςτος x τον ακόλυθον αναλογιον:

$$1)\ \frac{15}{x} = \frac{3}{4},\quad 2)\ \frac{4}{3} = \frac{x}{15},\quad 3)\ \frac{3}{4} = \frac{15}{x},\quad 4)\ \frac{x}{15} = \frac{4}{3}.$$

Σ' όλες τις περιπτόςις έχυμε μια λίςι $3x = 15 . 4$, απο τιν οπία έχυμε:

$$x = \frac{15 . 4}{3} = 20.$$

Ο άγνοςτος όρος τις αναλογίας βρίςκετε έτςι, όπος βρίςκετε ο άγνοςτος πολαπλαςιαςτις, όταν δοθι το γινόμενο κε ὲνας απ' τυς παράγοντες.

Για να βρίςκυμε τον άγνοςτο μέςο όρο τις αναλογίας, πρέπι το γινόμενο τον άκρον όρον να διερέ-

ςυμε δια τυ γνοςτυ μέςυ. Για να βρίςκυμε τον άγνοςτο άκρο όρο τις αναλογίας, πρέπι το γινόμενο τον μέςον όρον να διερέςυμε δια τυ γνοςτυ άκρυ.

Στιριζόμενι ςτον κανόνα τύτο, μπορύμε να γράπςυμε τι λίςι.

2. Να βρεθι ο x τις αναλογίας $12 : x = 6 : 5$.

$$x = \frac{12 . 5}{6} = 10.$$

§ 11. Εβρεςι τυ τέταρτυ ανάλογυ. Σιχνα δίνοντε τρις αριθμι, κε ζιτίτε τέταρτος αριθμος τέτιος, πυ μαζι με τυς τρις δοθέντας να ςχιματίςι αναλογία.

Παράδιγμα. Να βρεθι ο τέταρτος ανάλογος τον αριθμον 8, 10, 5.

Λ ί ς ι. Το πρόβλιμα αφτο έχι κάμποςες λίςις.

Ας κατατάκςυμε τυς αριθμυς κατα ςιραν ανάλογα με το μέγεθός-τυς: 10, 8, 5.

Τόρα θα βάλυμε τον αριθμο x μπροςτα, πίςο κε ανάμεςα ςτυς αριθμυς αφτυς κε θα γράπςυμε τις αναλογίες, πυ βρίςκυμε.

Ετςι θα λίςυμε 4 αναλογίες. Στις αναλογίες αφτες ο άγνοςτος x βρίςκετε μια ςτι θέςι τυ ενος άκρυ όρυ, μια ςτι θέςι τυ άλυ άκρυ, μια ςτι θέςι ενος απο τυς μέςυς όρυς.

1) $x : 10 = 8 : 5$, $\quad x = \frac{10 . 8}{5} = 16$,

2) $10 : x = 8 : 5$, $\quad x = \frac{5 . 10}{8} = 6 \frac{1}{4}$,

3) $10 : 8 = x : 5$, $\quad x = \frac{5 . 10}{8} = 6 \frac{1}{4}$,

4) $10 : 8 = 5 : x$, $\quad x = \frac{5 . 8}{10} = 4$.

Ι δέφτερι κε τρίτι περίπτοςι δίνον τις ίδιες απαντίςις: Μένυν τρις λίςις: $x = 16, x = 6 \frac{1}{4}, \quad x = 4$.

XV. ΕΦΘΙΑ ΚΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑ. ΕΝΙΑ ΤΥ ΜΕΣΥ ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΥ.

§ 1. Σταθερα κε μεταβαλόμενα μεγέθι. Κατα τιν μαθιματικι εκςερέβνιςι τον φενομένον, ζιτύμε να βρίςκυμε ςτα φενόμενα αφτα τέτιες ιδιότιτες, πυ να μπορέςυμε να τις εχτιμίςυμε κε να τις καταμετρίςυμε, κε να κάνυμε τυς λογαριαζμύς-μας πάνο ςτο αποτέλεζμα τον

καταμετρίςεον. Σινάμα όμος πάντα ζιτύμε να μάθυμε τιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι μεταξι δίο ί κε περιςότερον μεγεθον.

Τα μεγέθι, πυ μελετύμε με τιν βοίθια τον μαθιματικον μπορύμε να τα χορίςυμε ςε διο ομάδες: Ι — μεγέθι ςταθερα, ΙΙ — μεταβαλόμενα μεγέθι. Παράδιγμα ςταθερον μεγεθον μπορυν να χριςιμέφςυν ι μονάδες με τι βοίθια τον οπίον κάνυμε τιν καταμέτριςι: μέτρο, χιλιόγραμο, δεφτερόλεπτο, χρόνος. Τα μεγέθι αφτα δεν μεταβάλοντε. Ιπάρχυν κε άλα ςταθερα μεγέθι π.χ. το μέγεθος τις ορθις γονίας.

Οριζμι. **Ι. Σταθερο μέγεθος ονομάζετε εκίνο, το οπίο δεν αλάζι τι ςιμαςία-τυ.**

ΙΙ. Μεταβαλόμενο μέγεθος ονομάζετε εκίνο, το οπίο αλάζι τι ςιμαςία-τυ.

Μεταβαλόμενα ςιναντύμε ςε κάθε-μας βίμα: Ι κάτικι τις πόλις αλάζυν με τιν παρέλεφςι τον χρόνον· αλάζι το βάρος κε το ανάςτιμα τυ ανθρόπυ με τιν ιλικία-τυ· αλάζι το μάκρος μεταλικυ δοκαριυ κατα τιν θέρμανςι.

Ι κάτικι, το μάκρος, το βάρος ς' αφτες τις περιπτόςις ίνε μεταβαλόμενα μεγέθι.

Τα μεταβαλόμενα μεγέθι εκςαρτόντε απο άλα μεταβαλόμενα μεγέθι.

Ας δόςυμε μερικα παραδίγματα τις εκςάρτιςις τον μεταβαλομένον μεγεθον.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥ ΕΜΒΑΔΥ ΤΟΝ ΤΕΤΡΑΓΟΝΟΝ.

Ι πλεβρα τυ τετραγόνυ (ςαντίμετρα).	3	4	11	20	24
Το εμβαδο τυ τετραγόνυ (τετραγονικα ςαντίμετρα)	9	16	121	400	576

Στον πίνακα αφτο ιπάρχυν διο ςιρες. Στιν πρότι ςιρα ίνε ςιμιομένο το μάκρος τον πλεβρον τον διαφόρον τετραγόνον: ςε 3 ςμ, ςε 4 ςμ κ.λ.π.

Στι δέφτερι — ίνε ςιμιομένα τα αντίςτιχα εμβαδα, δ.λ. τα εμβαδα τον τετραγόνον με πλεβρες 3 ςμ, 4 ςμ κ.λ.π. Ι πλεβρα τυ τετραγόνυ ςτιν περίπτοςι αφτι ίνε ένα μεταβαλόμενο μέγεθος. Αφτο έχι δοθι. Το εμβαδο τυ τετραγόνυ ίνε άλο μεταβαλόμενο μέγεθος. Αφτο εκςαρτιέτε απο τιν πλεβρα.

Οριζμι. **Ι. Εκίνο το μεταβαλόμενο μέγεθος, τι ςιμαςία τυ οπίυ μπορύμε να μεταβάλυμε όπος θέλυμε, ονομάζετε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο μέγεθος.**

II. Το μεταβαλόμενο, ι ςιμαςία τυ οπίυ μεταβάλετε όταν μεταβάλετε το άλο μέγεθος, ονομάζετε εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

§ 2. Κατ' εφθίαν ανάλογα μεγέθι.

Μαθένοντας τιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι μεταχςι τον μεταβαλόμενον μεγεθον, μπορύμε ςε μερικες περιπτόςις να καθορίςυμε το νόμο τις αλαγις τυ μεγέθυς τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ απ' τιν αλαγι τυ μεγέθυς τυ ανεκςὰρτιτυ μεταβαλόμενυ.

Ας μάθυμε τις ιδιότιτες αφτις τις εκςάρτιςις, πυ φέρι το όνομα *εφθία αναλογία*.

Το βάρος 1 κιβ. **ντμ** ατςάλι ιςύτε με 7,8 χγ. Ας βρύμε το βάρος κοματιον ατςαλιυ, ο όνγος τον οπίον ιςύτε με: 5, 10, 50, 100 150, 200 κιβ. **ντμ.**

Τι λίςι ας τιν παραςτίςυμε ςε πίνακα.

P — το βάρος τυ κοματιυ ςε χιλιόγραμμα.	7,8	39	78	390	780	1170	1560
V — ο όνκος τυ κοματιυ ςε κιβικα ντετςίμετρα...	1	5	10	50	100	150	200

Ας πάρυμε απο τον πίνακα το βάρος ενος οπιυδίποτε κοματιυ κε ας βρύμε το λόγο αφτυ τυ βάρυς προς το βάρος άλυ κοματιυ. Π, χ.

$$\frac{390}{78}=5.$$

Ας βρύμε το βάρος τον όνκον τον ίδιον κοματιον: $\frac{50}{10}=5.$

Ι λόγι αφτι ίνε ίςι κε ι αριθμί 390, 78, 50 κε 10 ςχιματίζυν αναλογία: $\frac{390}{78}=\frac{50}{10}$, ίτε $\frac{390}{50}=\frac{78}{10}$. Το ίδιο αποτέλεζμα θα έχυμε, ςινκρίνοντας πάνο ςτον πίνακα τα βάρι κε τυς όνκος διο άλον κοματιον ατςαλιυ.

Οταν με τυς τέςςερες αριθμυς τον δίο ςτιλον τυ πίνακα θα μπορέςυμε να ςχιματίςυμε αναλογία, τότε έχυμε *αναλογικι εκςάρτιςι*.

Λέμε πος το βάρος P τυ ατςαλένιυ κοματιυ ίνε ανάλογο με τον όνκο V τυ κοματιυ.

Ι γραφικι παράςταςι τις λίςις θᾶνε τέτια:

$$\frac{P_2}{P_1}=5 \qquad \frac{V_2}{V_1}=5,$$

Ιτε εν ίδι αναλογιον:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{P_2}{V_2}=\frac{P_1}{V_1},$$

Το P_1 κε P_2 ίνε βὰρι τον κοματιον, το V_1 κε V_2 ίνε ι όνκι τον ίδιον κοματιον.

Εκςετάζοντας τον πίνακα, μπορύμε να καθορίςυμε τις ακόλυθες ιδιότιτες τις αναλογικις εκςάρτιςις:

I. Ο πίνακας περιέχι τις ςιμαςίες δίο μεταβαλόμενον μεγεθον.

II. Ενα απο τα μεγέθι αφτα θα ίνε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο, το άλο— εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

III. Στιν κάθε ςιμαςία, ενος μεγέθυς αντιςτιχι μια οριςμένι ςιμαςία τυ άλυ μεγέθυς.

Ας παραδεχτύμε ος ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο τον όνκο. Τότε το βάρος θα ίνε εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

Παρατιρύμε, πος ςε κάθε όνκο αντιςτιχι το βάρος-τυ, διότι με τιν αλαγι τυ όνκυ αλάζι κε το βάρος· δε μπορι να ιπάρχυν δίο ίςα κατα τον όνκο κομάτια με διάφορα βάρι, ίτε διο κομάτια ίςα κατα το βάρος, αλα διάφορυ όνκυ.

Ουτε εαν, ι όνκι ίνε ίςι, τότε κε τα βάρι ίνε ίςα.

IV. Αφκςένοντας τι ςιμαςία τυ ενος μεγέθυς όςες δίποτε φορες, αφκςένι κε ι αντίςτιχι ςιμαςία τυ άλυ μεγέθυς κατα τόςες φορες.

V. Ι λόγι δίο ςιμαςιον ενος μεγέθυς κε δίο αντίςτιχον μ' αφτες ςιμαςιον άλυ μεγέθυς ίνε ίςι κε αποτελυν αναλογία.

Τις ιδιότιτες αφτες έφκολα μπορύμε να δοκιμάςυμε πάνο ςτον εκςεταζόμενο πίνακα.

Ας πάρυμε διο κομάτια ςίδερο: 10 **κιβ. ντμ** κε 100 **κιβ. ντμ.** Ο όνκος τυ δέφτερυ ίνε μεγαλίτερος παραβαλόμενος με τον όνκο τυ πρότυ, αλα, ος φένετε μαζι μ' αφτο θα αφκςίςι κε το βάρος. Ο όνκος

μεγάλοςε 10 φορες κε το βάρος μεγάλοςε 10 φορες: αντις 78 χγ θα ίνε πια 780 χγ.

Ο λόγος $\frac{100}{10}$ ισύμε με τον 10 κε ο λόγος $\frac{780}{78}$ επίςις ισύτε με τον αριθμο 10. Αφτι ι λόγι ίνε ίςι.

Ι αριθμι 780, 78, 100 κε 10 ςχιματίζυν αναλογία $\frac{780}{78}=\frac{100}{10}$.

VI. Ο λόγος τις αριθμιτικις ςιμαςίας τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ προς τιν αντίςτιχο αριθμιτικι ςιμαςία τυ ανεκςάρτιτυ μεταβαλόμενυ ιςύτε πάντα με έναν κε τον ίδιο αριθμο.

$$\text{Π. χ:}\ \frac{78}{10}=\frac{780}{100}=\frac{1560}{200}=7{,}8.$$

Ιδιι όρι στι γραφικι παράςταςι έχυν τιν μορφι: $\frac{P}{V}=K$ όπυ το $K=7{,}8$. Ι αριθμι 7,8 κε το K ονομάζοντε κοεφιτςιέντα τις αναλογίας.

Ι εκςάρτιςι, πυ έχι αφτες τις ιδιότιτες, ονομάζετε *εφθία αναλογία*.

Τα μεταβαλόμενα μεγέθι, πυ έχυν ςχέςι μ' αφτι τιν εκςάρτιςι, ονομάζοντε *μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα*.

Αν δίο μεγέθι βρίςκοντε ςε τέτια εκςάρτιςι, όςτε αφκςένοντας το ένα απ' αφτα κάμποςες φορες, αφκςένι κε το άλο τόςες φορες, τότε λένε, πος τα μεγέθι αφτα βρίςκοντε ςε εκςάρτιςι κατ' εφθίαν αναλογικι, ίτε ότι ίνε κατ' εφθίαν ανάλογα το ένα προς το άλο.

Στο παράδιγμά-μας το βάρος κε ο όνκος τυ κοματιυ ίνε *μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα, ίτε μόνο ανάλογα.*

Ι γραφικι παράςταςι τυ νόμυ τις εφθίας αναλογίας θάνε $\frac{P}{V}=K$, ίτε $P=KV$.

§ 3. Εφαρμογι τον αναλογιον στι λίςι προβλιμάτον.

Ι λεπτομεριακι εκςέταςι τις εκςάρτιςις τυ βάρυς απο τον όνκο απόδιχςε, πος το βάρος κε ο όνκος τον αντικιμένον, πυ ίνε καμομένα απο ένα ιλικο ίνε μεγέθι κατ' εφθίαν ανάλογα.

Τόρα μπορύμε να πλατένυμε το πρόβλιμά-μας. Μπορύμε εποφελύμενι τις ιδιότιτες τον κατ' εφθίαν ανάλογον μεγεθον, να βρίςκυμε τις χριαζύμενες ςιμαςίες τον μεγεθον χορις να ςχιματίςυμε πίνακα.

1. Ενα τρένο ςε 2 όρες πέραςε 60 χμ.

Να βρεθι ο δρόμος, τον οπίο το ίδιο τρένο θα κάνι ςε 3 όρες, κε το χρόνο, πυ πρέπι να κςοδέπςι για να διατρέκςι 180 χμ δρόμο, αν πάι πάντα με τιν ίδια ταχίτιτα.

Για τι λίςι τυ προβλίματος στιριζόμαςτε στιν ιδιότιτα τον αναλογικον μεγεθον κε ςχιματίζυμε αναλογία. Ας παραςτίςυμε το ένα ζιτύμενο μέγεθος με x κε το άλο με το y. Τιν αναλογία ςχιματίζυν έτςι, όςτε να έχι τρις γνοςτες ςιμαςίες τον μεγεθον κε μία άγνοςτι. Δεν ίνε ανάνκι κάθε φορα να ςχιματίζυμε πίνακα τον ςιμαςιον για τι λίςι τυ προβλίματος. Αρκι να έχυμε διο ζέβγι ςιμαςιον, μαζι με κίνο το ζέβγος, πυ περιέχι ένα άγνοςτο μεταβαλόμενο, αφυ απο μπροςτα βεβεοθίκαμε, πος τα μεγέθι θα ίνε ανάλογα.

Για να καταλάβυμε καλίτερα το πρόβλιμα, βάζυμε τυς δεδομένυς κε τυς άγνοςτυς αριθμυς ςε δίο ςτίλες, κε ςινάμα ςε κάθε ςτίλι γράφυμε τις ςιμαςίες ενος κε τυ ίδιυ μεγέθυς. Ι αντίςτιχες ςιμαςίες τον διο μεγεθον θα βρεθυν τότε στιν ίδια ςιρα.

1) Για να βρίςκυμε το δρόμο έχυμε:

2 όρες — 60 χμ
3 „ — x „
$x : 60 = 3 : 2$, απο δο $x=\frac{60 \cdot 3}{2}=90$ χμ.

2) Για να βρίςκυμε το χρόνο έχυμε:

2 όρες — 60 χμ
y „ — 180 „
$y : 2 = 180 : 6$, απο δο $y=\frac{2 \cdot 180}{60}=6$ όρες

Με τέτια γραφι καθένας λόγος έχι ςχιματιςτι απο τις ςιμαςίες ενος κε τυ αφτυ μεγεθυς.

Παρατίριςι. Προ τις λίςις εκςάπαντος πρέπι να δοκιμάςυμε αν ίνε τα δεδομένα αφτα μεγέθι ανάλογα.

2. 40 χρονον άνθροπος ζιγίζι 60 χγ. Πόςο ζιγίζι πεδι 10 χρονόνε;

Λίςι. Στιν ερότιςι τυ προβλίματος δεν ίνε δινατο να βρίςκυμε απάντιςι κάνοντας τις ςχετικες πράκςις, διότι τιν ιλικία κε το βάρος τυ ανθρόπυ δεν μπορύμε να τα λογαριάςυμε ποςα ανάλογα, όπος μας δίχνι ι πίρα.

§ 4. Μεγέθι αντιςτρόφος ανάλογα.

Δε ςιμβένι πάντοτε τα ανάλογα μεγέθι να ικανοπιίςυν τιν εκςάρτιςι τις εφθίας αναλογίας. Σιχνα ςιναντιέτε κε άλι εκςάρτιςι, ι οπία ονομάζετε **αντίςτροφι αναλογία.**

Παράδιγμα. Ο ακόλυθος πίνακας παραςτένι τιν εκςάρτιςι μετακςι τυ αριθμυ τον ςτροφον στο λεπτο τυ αντικιμένυ, πυ πελεκάνε στο τορνεφτίρι, κε τι διάμετρο αφτυ τυ αντικιμένυ.

n αριθμος ςτροφον ςτο λεπτο....	10	16	20	50	80	100	160
D — διάμετρο ςε μιλίμετρα....	200	125	100	40	25	20	12,5

Ας πάρυμε για ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο τι διάμετρο D.

Ο αριθμος τον ςτροφον n θα εκςαρτιθι απο το μεταβαλόμενο D. Εκςετάζοντας το νόμο τις εκςάρτιςις, παρατιρύμε, πος ο πίνακας τον ςιμαςιον δεν ικανοπιι τυς όρυς τις εφθίας αναλογίας επιδι:

1. Με το μεγάλομα τις διάμετρυ ο αριθμος τον ςτροφον δεν μεγαλόνι, μα λιγοςτέβι.

2. Ο λόγος το εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ προς το ανεκςάρτιτο δε δίνι ςταθερο αριθμο.

Ι ιδιότιτες τυ πίνακα θα ίνε ι ακόλυθες:

I. Ο πίνακας περιέχι διο ςιρες ςιμαςιον μεταβαλόμενον μεγεθον.

II. Το ένα απο αφτα τα μεγέθι θα ίνε ανεκςάρτιτο μεταβαλόμενο, το άλο εκςαρτιμένο μεταβαλόμενο.

III. Στιν κάθε ςιμαςία μεγέθυς τις μιας ςιρας αντιςτιχι μια οριζμένι ςιμαςία μεγέθυς τις άλις ςιρας.

IV. Με τιν άφκςιςι τον ςιμαςιον τυ μεγέθυς τις μιας ςιρας κατα κάμποςες φορες ι ςιμαςία τον μεγεθον τις άλις ςιρας ελατόνετε τόςες φορες.

V. Ο λογος δίο ςιμαςιον τον μεγεθον τις μιας ςιρας κε ο αντίςτροφος λόγος δίο αντίςτιχον ςιμαςιον τις άλις ςιρας ίνε ίςι κε αποτελυν αναλογία.

VI. Το γινόμενο τις αριθμιτικις ςιμαςίας τυ εκςαρτιμένυ μεταβαλόμενυ επι τιν αντίςτιχι αριθμιτικι ςιμαςία τυ ανεκςάρτιτυ μεταβαλόμενυ ιςύτε πάντα με ένα κε τον ίδιο άριθμο.

Τις ιδιότιτες αφτες ίνε έφκολο να εκςετάςυμε στο παράδιγμα τυ δεδομένυ πίνακα, όπος εμις εκςετάςαμε τις ιδιότιτες τις εφθίας αναλογίας.

Τιν εκςάρτιςι, πυ έχι τέτιες ιδιότιτες τιν ονομάζυν **αντίςτροφι αναλογία.**

Εαν δίο μεγέθι εκςαρτιόντε το ένα απο το άλο έτςι, όςτε με τιν άφκςιςι τυ ενος απο αφτα κάμποςες φορες ελατόνετε το άλο τόςες φορες, τότε λένε, πος τα μεγέθι βρίςκυντε ςε εκςάρτιςι αντιςτρόφος ανάλογα ίτε, ότι ίνε αντίςτροφα ανάλογα το ένα προς το άλο.

Εαν θα ςινκρίνυμε τις ιδιότιτες τις εφθίας κε αντίςτροφις αναλογίας θα δύμε, πος θα διαφέρυν μονάχα κατα τιν IV, V κε VI ιδιότιτα· ι IV ιδιότιτα ίνε τόςο εφκολονόιτο, όςτε δεν απετι ιδιέτερες επεκςιγίςις.

Ας εκςετάςυμε τιν V ιδιότιτα πυ ίνε περίπτοςι εφθίας αναλογίας. Εχι κε εδο παρατιριέτε αναλογία. Ι διαφορα μονάχα ίνε ςτιν ταкςινόμιςι τον όρον τις αναλογίας. Ας το εκςιγίςυμε πάνο ςε παράδιγμα. Ας πάρυμε απο τον πίνακα τυς αριθμυς τον ςτροφον για τις διάμετρες 200 μμ κε 40 μμ.

Ι διάμετρος	200 . . . 40,
Ο αριθμος ςτροφον	10 . . . 50,
	200 : 40 = 50 : 10, 200 . 10 = 50 . 40

Σε περίπτοςι αντίςτροφις αναλογίας, όπος φένετε ςτο παράδιγμα αφτο ο λόγος δίο ςιμαςιον ενος μεγέθυς (αριθμον μιας ςιρας) ίνε ίςος με τον αντίςτροφο λόγο τον αντίςτιχον ςιμαςιον τυ άλυ μεγέθυς, (δίο αριθμον τις δέφτερις ςιρας) ενο το γινόμενο τον αντίςτιχον ςιμαςιον τον ίδιον μεγεθον ίνε το ίδιο.

Ι γραφικι παράςταςι τον αναλογιον κε τον λόγον τις αντίςτροφις αναλογίας θάνε τέτια:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2},$$

ίτε

$$n_2 : n_1 = \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_1},$$

Εδο το D_2 κε D_1 ςιμένυν τα αριθμιτικα μεγέθι τον διαμέτρον τα δε n_2 κε n_1 τυς αντίςτιχυς ς' αφτα αριθμυς τον ςτροφον.

Ι γραφικι παράςταςι τις VI ιδιότιτας έχι όπςι:

$$Dn = K.$$

Στιν περίπτοςί-μας το $K = 2000$.

Ι αριθμι 2000 κε K φέρυν τιν ονομαςία κοεφιτςιεντ τις αναλογίας.

Ας ςινκρίνυμε τι λίςι τον διο προβλιμάτον. Στο ένα τα δεδομένα κε το ζιτύμενο μέγεθος θα ίνε κατ' εφθίαν ανάλογα, ςτο άλο πρόβλιμα — αντιςτρόφος ανάλογα.

Πρόβλιμα 1. Ενα αφτοκίνιτο διέτρεκςε ςε 2 όρες 120 χμ. Σε πόςο κερο με τις ίδιες ςινθίκες μπορι το αφτοκίνιτο να διατρέκςι 300 χμ;

Λίςι. Κςέρυμε πος ο δρόμος κε ο χρόνος κατα τιν ιςοταχι κίνιςι ίνε ςινδεδεμένι με το νόμο τις εφθίας αναλογίας.

Γράφυμε τυς όρυς:

2 όρες — 120 χμ
x „ — 300 „

Σχιματίζομε αναλογία: $2 : x = 120 : 300$, ίτε $x : 2 = 300 : 120$ απο το οπίο έχομε:

$$x = \frac{2 \cdot 300}{120} = 5 \text{ όρες.}$$

Πρόβλιμα 2. Για το κσεφόρτομα τον βαγονιον χορις μιχανι χριάζοντε 6 εργάτες, πυ εχτελυν τι δυλια αφτι σε 8 όρες. Πόςι εργάτες θα χριαςτυν, για να κσεφορτόςυν το ίδιο φορτίο σε 3 όρες;

Λ ί ς ι: Κατα τι λίςι τέτιον προβλιμάτον ι μέςι εργατικι ικανότιτα τυ ενος εργάτι λογαριάζετε σταθερι.

Με τιν άφκςιςι τυ αριθμυ τον εργατον ο χρόνος τυ κσεφορτόματος ελατόνετε ανάλογα.

Στο πρόβλιμα αφτο έχομε να κάνομε με αντιςτρόφος ανάλογα μεγέθι. Ας γράπςομε τυς όρυς τυ προβλίματος:

6 εργάτες — 8 όρες
x „ — 3 „

Πέρνομε τυς λόγυς κε γράφομε αναλογία:

$$3 : 8 = 6 : x \quad \text{ίτε} \quad x : 6 = 8 : 3.$$

Απο δο βρίςκομε:

$$x = \frac{6 \cdot 8}{3} = 16 \text{ εργάτες·}$$

§ 5. Λίςι προβλιμάτον με τιν αναγογι ςτι μονάδα.

Τι ςιμαςία ενος εκ τον μεγεθον σε περιπτόςις εφθίας κε αντίςτροφις αναλογίας, μπορόμε να βρόμε με τιν αναγογι ςτι μονάδα.

Πρόβλιμα 1. 28 εργάτες με ίδιο μιςθο πέρνυν 4200 ρύβλια το μίνα. Πόςο μιςθο θα πάρυν 50 εργάτες, πυ πλιρόνοντε με τον ίδιο τρόπο;

Λ ί ς ι. Ι 28 εργάτες πέρνυν 4200 ρύβλια.

Πόςο πέρνι ένας εργάτις; Ενας εργάτις πέρνι 28 φορες λιγότερο. Ας το γράπςομε.

Κάθε μια εργατικι μονάδα θα πάρι $\frac{4200}{28}$ ρύβλια.

Πόςο πέρνυν 50 εργάτες; Ο μιςθος τον πενίντα εργατον θα ίνε 50 φορες περιςότερος απο το μιςθο τυ ενος εργάτι. Θα έχομε λιπον:

$$\frac{4200 \cdot 50}{28} = 7500 \text{ ρ.}$$

Ι πλέρια γραφτι λίςι θα έχι τιν ακόλυθι μορφι:

Για τυς 28 εργάτες μιςθος 4200 ρύβλια.

„ τον 1 „ „ $\frac{4200}{28}$ „

„ τυς 50 „ „ $\frac{4200 \cdot 50}{28} = 7500$ ρύβλια.

Πρόβλιμα 2. 20 εργάτες βάζυν τα θεμέλια ενος χτιρίυ σε 15 ιμέρες. 25 εργάτες με τιν ίδια παραγογικότιτα σε πόςες μέρες θα τελιόςυν τιν ίδια εργαςία;

Λ ί ς ι. Για το φτιάςιμο τον θεμελίον χριάζετε εργαςία 20 εργατον σε 15 μέρες. Πόςες εργατοιμέρες θα χριαςτυν για τιν εργαςία αφτι; Για τιν εργαςία αφτι ιποτίθετε να κσοδέπςυν (20 . 15) εργατοιμέρες.

Σε πόςες μέρες θα τελιόςυν τιν ίδια εργαςία 25 άνθροπι;

25 άνθροπι θα τελιόςυν τιν εργαςία 25 φορες ενορίτερα. Θα χριαςτυν 25 φορες ολιγότερες ιμέρες. Ας γράπςομε τι λίςι.

Για 20 εργάτες χριάζετε 15 μερον εργαςία.

„ 1 εργάτι „ 20 . 15 „ „

„ 25 εργάτες „ $\frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ μέρες.

§ 6. Αναλογικι διέρεςι.

Πρόβλιμα 1. 3 τορνεφτες για να επεκσεργαςτυν ένα μέρος τις μιχανις χριάςτικαν $2\frac{1}{2}$ όρες. Ο πρότος τορνεφτις δύλεπςε 40 λεπτα, ο δέφτερος 50 λεπτα κε ο τρίτος τον επίλιπο κερο. Για όλι τιν εργαςία αφτι πλιροθίκανε 12 ρύβλια. Πόςα ρύβλια πίρε καθένας τορνεφτις;

Το πρόβλιμα αφτο μπορόμε να λίςομε με ςινιθιζμένες αριθμιτικες πράκςις. Εμις όμος κσέροντας τις ιδιότιτες τον αναλογιον, μπορόμε να λίςομε το πρόβλιμα τύτο πιο ςίντομα — με τον τρόπο τις διέρεςις κατ'αναλογίαν.

Οςο πιο πολι δύλεπςε ο εργάτις τόςα περιςότερα χρίματα θα πάρι. Ι πλιρομι τις εργαςίας κε ο χρόνος ίνε ανάλογα ποςα.

Εδο έχομε εφθία αναλογία.

Ας ςιμιόςομε με τα γράματα τιν πλιρομι τις εργαςίας: τυ πρότυ εργάτι με το x_1, τυ δέφτερυ με το x_2, τυ τρίτυ x_3. Ας γράπςομε, πος ι πλιρομι ίνε ανάλογος με το χρόνο δ.λ. $x_1 : x_2 : x_3 = 40 : 50 : 60$.

Το άθριζμα τον μερον $40+50+60=150$.

Ι πλιρομι για ένα μέρος τις εργασίας αποτελι $\frac{1200}{150}=8$ καπ.

Ι πλιρομι χάθε εργάτι: τυ πρότυ $8 \cdot 40=320$ καπ., τυ δέφτερυ $8 \cdot 50=$ $=400$ καπ., τυ τρίτυ $8 \cdot 60=480$ καπ.

Σιμίοςι. Τυς λόγυς μπορύμε να γράπςυμε κε έτςι: $x_1 : x_2 : x_3 = 40:50:60=4:5:6$. Το όλο 15 μέρι. Λογαριάζοντας θα βεβεοθύμε πος ι πλιρομι τις εργασίας θα ίνε ι ίδια.

Πρόβλιμα 2. Να διερεθι ο αριθμος 855 ςε μέρι ανάλογα τον:

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{5}.$$

Λίςι. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{40}{60} : \frac{45}{60} : \frac{50}{60} : \frac{36}{60}$.

Ι λόγι δεν μεταβάλοντε αν τον ιγύμενο κε τον επόμενο όρο κάθε αναλογίας πολαπλασιάςυμε επι 60.

Μετασχιματίζοντας το λόγο τελιοτιχα θα έχυμε:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 40 : 45 : 50 : 36.$$

Το άθριζμα τον μερον: $40+45+50+36=171$. Το ένα μέρος $\frac{855}{171}=5$.

Τόρα βρίςχυμε x_1, x_2, x_3, x_4 θα έχυμε 200, 225, 250, 180. Το άθριζμα θα αποτελέςι 855.

Σιμίοςι. Το λόγο τον κλαζματικον αριθμον πάντα πρέπι να τον αντικαταςτίςυμε με λόγο ακέρεον αριθμον. Για τύτο τα κλάζματα τρέπυμε ςε ομόνιμα κε πέρνυμε το λόγο τον αριθμιτον.

Πρόβλιμα 3. Να διερεθι το 1380 ςε μέρι ανάλογα τον ακόλυθον αριθμον:

0,4, 0,5, 0,32, 0,16.

Λίςι. Για να λίςυμε το πρόβλιμα τύτο γράφυμε αναλογίες:

$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0{,}4 : 0{,}5 : 0{,}32 : 0{,}16 = 40 : 50 : 32 : 16 = 20 : 25 : 16 : 8$.

Το άθριζμα τον μερον $20+25+16+8=69$. Το μέγεθος τυ ενος μέρυς ιςύτε:

$\frac{1380}{69}=20$ κε $x_1=400$, $x_2=500$, $x_3=320$· $x_4=160$.

Για να διερέςυμε ένα δοθέντα αριθμο ςε μέρι ανάλογα κάμποςον αριθμον, πρέπι: 1) να αντικαταςτίςυμε

το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με τον λόγο τον ακέρεον· 2) να προςθέςυμε τυς εβριςκόμενυς αριθμυς, για να μάθυμε τον αριθμό τον μεριδίον, ςτα οπία πρέπι να διερέςυμε τον δοθέντα αριθμο· 3) να διερέςυμε τον δοθέντα αφτον αριθμο, δια τυ αριθμυ τον μεριδίον, για να μάθυμε με τι ιςύτε το ένα μέρος· 4) να πολαπλαςιάςυμε το εβριςκόμενο μέγεθος τυ ενος μέρυς επι τυς ακέρευς αριθμυς τον λόγον.

Κάποτε ςιναντιόντε πιο πολίπλοκες περιπτόςις διέρεςις κατ' αναλογίαν.

Πρόβλιμα. 4. Για να κάνυνε μπετόνι ανακατόνυν κςιρο τςιμέντο, άμο κε χαλίκια. Ο λόγος τον όνκον, πυ αποτελυν τα ςιςτατικα τυ μπετονιυ ίνε 2 : 6 : 9.

Πόςο θα χριαςτι άμος κε χαλίκια για τιν ετιμαςία διάλιςις αν θα διαθέτυμε 900 **κιβ ντμ** κςερο τςιμέντο; Πόςο θα γίνι μπετόνι, αν ο όνκος τον χαλικιον αποτελι 0,9 τυ όνκυ τυ μπετονιυ, πυ παραςκεβάζυμε.

Λίςι. Ολο το μίγμα περιέχι $2+6+9=17$ μέρι. Εδο μπένυν 2 μέρι τςιμέντυ. Εχυμε 900 **κιβ. ντμ** τςιμέντο. Οςτε, ς' ένα μέρος τις διάλιςις αναλογι $\frac{900}{2}=450$ **κιβ. ντμ.**

Τόρα ας βρίςκυμε τα ςιςτατικα τυ μπετονιυ.

Θα χριαςτυν ιλιχα:

τςιμέντο 2 μέρι — $450 \cdot 2 = 900$ **κιβ. ντμ.**

άμο 6 μέρι — $450 \cdot 6 = 2700$ „ „

χαλίκια 9 μέρι — $450 \cdot 9 = 4050$ „ „

Θα ετιμάςυμε μπετόνι $4050 : 0{,}9 = 4500$ **κιβ. ντμ** $= 4{,}5$ **κιβ μ.**

Στο πρόβλιμα αφτο έχυν δοθι ι λόγι τον όνκον τον ςιςτατικον μερον κε ο αριθμος, πυ δίχνι τον όνκο μιας απο τις υςίες.

Διερόντας τον αριθμο τύτον ςτον αντίςτιχο αριθμο τον μερον, μάθαμε με τί ιςύτε το ένα μέρο τυ μίγματος. Με τον πολαπλαςιαζμο βρίκαμε, πόςο πρέπι να πάρυμε απο κάθε υςία.

Πρόβλιμα 5. Τέςερες κολχόζνικι εργάςτικαν ς' ένα ιδιέτερο χοράφι. Ι εργατοιμέρες τυ καθενος, ίςαν ανάλογι με τυς αριθμυς 12 : 15 : : 18 : 20. Ο δέφτερος κε ο τρίτος έκαναν 66 εργατοιμέρες. Πόςες εργατοιμέρες έκανε ο καθένας;

Λίςι. Παραςτένυμε αριθμο τον εργατοιμερον με το x_1, x_2, x_3, x_4. Οπος πάντα, πρέπι να καθορίςυμε, με πόςες ιμέρες αντιςτιχι το ένα μέρος.

Στο μερίδιο τυ δέφτερυ κε τρίτυ κολχόζνικυ αναλογυν $15+18=$ $=33$ μέρι, πυ αποτελυν 66 μέρες.

Το ένα μέρος αποτελι $\frac{66}{33} = 2$ μέρες. Ορίζυμε τις εργατοιμέρες για τον κάθε κολχόζνικο:

$$x_1 = 2 . 12 = 24 \text{ μέρες}, \quad x_3 = 2 . 18 = 36 \text{ μέρες},$$
$$x_2 = 2 . 15 = 30 \text{ μέρες}, \quad x_4 = 2 . 20 = 40 \text{ μέρες}.$$

Στο πρόβλιμα αφτο μας έχι δοθι το άθριζμα όχι όλον τον μερον, μα μονάχα κάμποσον, γι' αφτο για τι λίσι τυ προβλίματος προσθέσαμε όλα αφτα τα μέρι.

Κάποτε σιμβένι, να μας δίνετε στο πρόβλιμα όχι το άθριζμα δίο οποιοδίποτε μερον, μα ι διαφορά-τυς.

Πρόβλιμα. 6. Τέσερες εργάτες, δυλέβοντας μαζί, έπρεπε να μιράσυν τα χρίματα, πυ κέρδισαν ανάλογα με τον αριθμο τον ορον τις εργασίας. Στο τέλος τις εργασίας μέτρισαν τον αριθμο τον ορον, πυ καθένας-τυς δύλεψε ς' αφτι την εργασία, κε βρίκανε: 5, 8, 6 κε 6 όρες. Οταν πλιροθίκανε ο δέφτερος εργάτις πίρε κατα 10 ρύβλια περισότερα απο τον τρίτο. Πόσα κέρδισε ο καθένας;

Λ ί σ ι. Ολο το κέρδος πρόκιτε να μιρασθι σε μέρι ανάλογα:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 8 : 6 : 6.$$

Ο αριθμος το μερον τυ δέφτερυ εργάτι ίνε περισότερος παρα τυ τρίτυ. Βρίσκυμε τι διαφορα: 8 — 6 = 2 μέρι. Για δίο μέρι ο δέφτερος εργάτις πίρε 10 ρύβλια. Οστε το ένα μέρος αποτελύσε 5 ρύβλια.

Ο 1-ος θα πάρι $x_1 = 5 . 5 = 25$ ρύβλια,
Ο 2-ος θα πάρι $x_2 = 5 . 8 = 40$ ρυβ.
Ο 3-ος κε ο 4-ος θα πάρυν x_3 κε $x_4 = 5 . 6 = 30$ ρυβ.

Σε μερικα προβλίματα σιμβένι να διερέσυμε τον αριθμο σε μέρι αντιστρόφος ανάλογα με τυς δεδομένυς αριθμυς. Ας φέρυμε παραδίγματα λίσις τέτιον προβλιμάτον.

πρόβλιμα 7. Πρέπι να σχιματίσυμε μίγμα απο δίο ίδι τσαγιυ. Το κιλο τυ πρότυ ίδυς ακσίζι 15 ρ. τυ δέφτερυ — 6 ρ. το ποσο τυ τσαγιυ τυ πρότυ κε δέφτερυ ίδυς, πυ πίραμε να κάνυμε μίγμα ίνε αντιστρόφος ανάλογα με τιν ακσία τυ τσαγιυ.

Πόσο πρέπι να πάρυμε τσάι πρότυ κε δέφτερυ ίδυς για να κάνυμε μίγμα 105 χγ;

Λ ί σ ι. Εαν το βάρος ίνε αντιστρόφος ανάλογο τις ακσίας τυ τσαγιυ, αφτο σιμένι, πος ο λόγος τον βαρον ισύτε με το λόγο τον αριθμον, πυ ίνε αντίστροφι με τιν ακσία τυ τσαγιυ.

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{15} : \frac{1}{6}.$$

Αντικαθιστόντας το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με το λόγο τον ακέρεον, θα έχυμε:

$$x_1 : x_2 = \frac{2}{30} : \frac{5}{30} = 2 : 5$$

I ίδυς πρέπι να πάρυμε 2 μέρι,
II ίδυς „ „ „ 5 „
Το όλο „ „ „ 2 + 5 = 7 μέρι.

Το ένα μέρος αποτελι $\frac{105}{7} = 15$ χγ.

I ίδυς πρέπι να πάρυμε 15 . 2 = 30 χγ,
II ίδυς „ „ „ 15 . 5 = 75 χγ.

Πρόβλιμα 8. Να διερεθι ο αριθμος 1440 κατ' αντίθετι αναλογία με τυς αριθμυς 5, 7.

Λ ί σ ι. Ας πάρυμε αριθμυς αντίθετυς με τυς δεδομένυς. Γράφυμε τυς όρυς τυ προβλίματος εν ίδι λόγον αφτον τον αριθμον:

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{5} : \frac{1}{7}.$$

Αντικαθιστύμε το λόγο τον κλαζματικον αριθμον με το λόγο τον ακέρεον.

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{7} = \frac{7}{35} : \frac{5}{35} = 7 : 5.$$

Βρίσκυμε τον αριθμο το μερον: 7 + 5 = 12.

Βρίσκυμε τιν ακσία ενος μέρυς: $\frac{1440}{12} = 120.$

Βρίσκυμε τυς ζιτύμενυς αριθμυς:

$$x_1 = 120 . 7 = 840$$
$$x_2 = 120 . 5 = \underline{600}$$
$$1440$$

Ετσι επίσις λίνυμε τα προβλίματα σε κίνες τις περιπτόσις, όταν ίνε ανάνκι να διερεθι αριθμος αντίστροφα, ανάλογος με τρις, τέσερες κ.τ.λ. αριθμυς.

§ 7. Μέςος αριθμιτικος όρος. **Πρόβλιμα.** Κατα τιν ταξινόμιςι κε διανομι τον αβγον το ίδος-τυς καθορίζετε με το ζίγι. Κατα τιν ταξινόμιςι, πρότυ ίδυς αβγα λογαριάζοντε εκίνα, πυ έχυν βάρος 7,78 χγ. τα 120 κομάτια· δέφτερυ ίδυς — βάρος 6,96 χγ τα 120· τρίτυ ίδυς — βάρος 5,32 χγ τα 120.

Στο κολχοζ διαλέγοντας τα αβγα βρίκαν τα ακόλυθα βάρι:

Ζίγιςι	Βάρος (ςε χιλιόγραμα)	Αριθμος αβγον	Βάρος ενος αβγυ (ςε χιλιόγραμα)	Βάρος 120 αβγον (ςε χιλιόγραμα)
1	2,581	40	0,0645	7,740
2	3,321	50	0,0664	7,968
3	1,286	20	0,0643	7,716
4	6,511	100	0,0651	7,812
5	7,849	120	0,0654	7,849
	21,548	330		

Για να βρύμε σε πιο ίδος ανίκυν αφτα τ' αβγα, πρέπι να καθορίςυμε το μέςο βάρος τυ ενος αβγυ κε το μέςο βάρος τον 120 αβγον. Το βάρος κάθε αβγυ βρίςκυν με τι διέρεςι τυ βάρυς τον ζιγιςμένον αβγον δια τυ αριθμυ τον αβγον.

Απο τον πίνακα βλέπυμε, πος τα εκατοςτα μέρι κατα το ζίγι τυ ενος αβγυ (κε τα ακέρεα γραμάρια κατα το ζίγι τον 120 αβγον) ς' όλες τις περιπτόςις τυ ζιγίζματος ίνε τα ίδια. Διαφορα ιπάρχι μονάχα στα χιλιοςτα μέρι. Αφτο ςιμένι, πος για το βάρος ενος αβγυ τα εκατοςτα μέρι τυ χιλιόγραμυ έχυν οριςθι ςοςτα, αλα τα χιλιόςτα κε δεκάκις χιλιοςτα μέρι δίχνυν λάθος.

Για τα 120 αβγα ολόκλιρα τα χιλιόγραμα έχυν οριςθι ςοςτα, κε το λάθος αρχίζι απο τα δέκατα μέρι. Λέμε, πος κατα το ζίγι τυ ενος αβγυ τα χιλιοςτα κε δεκάκις χιλιοςτα μέρι τυ χιλιόγραμυ δεν θα ίνε *ακριβις αριθμι*.

Οπος φένετε τ' αβγα έχυν διαφορα κατα το βάρος στα χιλιοςτα μέρι τυ χιλιογράμυ. Επίςις μπορύμε να πύμε, πος για το βάρος τον 120 αβγον δεν έχυμε ακριβι μερίδα στα δέκατα μέρι τυ χιλιογράμυ.

Βλέπυμε, πος δεν μπορύμε να έχυμε ακριβις αριθμυς κατα τιν καταμέτριςι, δεν μπορύμε να έχυμε ακριβο ζίγι τυ αβγυ μονάχα με το ζίγιζμα. Το βάρος τυ αβγυ, πυ βρίςκυμε ςτο κάθε ζίγιζμα θα ίνε το κατα προςένκιςι βάρος-τυ.

Ας ςιμφονίςυμε: πάντα, ς' όλες τις καταμετρίςις κε ςτυς κατα-προςένκιςι λογαριαζμυς, να πάρυμε μονάχα ένα αναχριβι αριθμο· όλυς τυς άλυς αναχριβις αριθμυς θα απορίπςυμε, στρονκιλόνοντας τον εβριςκόμενο αριθμο.

Θα πάρυμε για το βάρος τυ ενος αβγυ τυς ακόλυθυς αριθμυς. 0,064 χγ. 0,066 χγ· 0,064 χγ 0,065 χγ· 0,066 χγ. Για το βάρος 120 αβγον: 7,7 χγ· 7,9 χγ· 7,7 χγ· 7,8 χγ· 7,9χγ.

Ας πάρυμε το αριθμιτικο μέςο όλον τον βαρον ίτε, όπος λένε τον μέςον όρο τυ βάρυς.

Για να βρίςκυμε το μέςο αριθμιτικο όρο (διλ. τον μέςον όρο) κάμποςον αριθμον πρέπι να προςθέςυμε όλυς τυς αριθμυς, πυ έχυν δοθι κε το άθριζμα να διερέςυμε δια τυ αριθμυ τον προςθετέον.

Για ένα αβγο:

$$\frac{0{,}064 + 0{,}066 + 0{,}064 + 0{,}065 + 0{,}066}{5} \approx 0{,}065 \text{ χγ.}$$

Για τα 120 αβγα:

$$\frac{7{,}7 + 7{,}9 + 7{,}7 + 7{,}8 + 7{,}9}{5} \approx 7{,}8 \text{ χγ.}$$

Ετςι βρίκαμε το μέςο βάρος ενος αβγυ 0,065 χγ κε για τα 120 αβγα — 7,8 χγ.

Τα αβγα, πυ ζιγίςαμε, μπορύμε να λογαριάςυμε αβγα πρότυ ίδυς ςίμφονα με το στοντάρτο.

Θα ίταν πιο ςοςτο να βρύμε το βάρος τυ ενος αβγυ με τι διέρεςι τυ αθρίζματος τον αριθμον τις δέφτερις στίλις τυ πίνακα δια τυ αθρίζματος τον αριθμον τις τρίτις στίλις.

Σ' αφτι τιν περίπτοςι θα ίχαμε:

$$\frac{21{,}548}{330} \approx 0{,}0652 \text{ χγ.}$$

Οταν έχυμε πολα ζιγίζματα, βρίςκυμε ικανοπιιτικα μέςα αποτελέζματα ακόμι κε τότε, όταν τα ιδιέτερα ζίγι δεν ίςαν αρκετα ακριβι.

Για να βρίςκυμε τον μέςο αριθμιτικο πολον αριθμον πρέπι να προςθέςυμε όλυς αφτυς τυς αριθμυς κε το άθριζμα να διερέςυμε δια τυ αριθμυ τον προςθετέον.

XVI. ΠΡΟΤΣΕΝΤΑ.

§ 1. Ενια τον προτςέντον. *Οριζμος.* **Προτςέντο ονομάζετε το εκατοςτο μέρος τυ αριθμυ.**

Στιν αρχι χριςιμοπιύςαν τι λέξι προτςέντο τότε μονάχα, όταν ο δανιςτις δάνιζε χρί-

ματα κε ζιτύςε να τυ επιςτρέπςυν τα χρίματα με οριζμένι προςθίκι ςτα εκατο.

Για τιν ςιμίοςι τον προτςέντον χριςιμοπιυν ιδιέτερο ςιμίο — $^0/_0$. $1^0/_0$ ςιμένι ένα προτςέντο, διλ. ένα εκατοςτο μέρος τυ αριθμυ. $3^0/_0$ ςιμένι τρία προτςέντα, διλ. τρία εκατοςτα μέρι τυ αριθμυ.

§ 2. Αντικατάςταςι κλαζματικυ αριθμυ με αριθμο, πυ να παραςτένι προτςέντα.

Οταν λίνυμε προβλίματα, ςιχνα ςιμβένι τον αριθμο, πυ παραςτένι προτςέντα, να τρέπυμε ςτα εκατοςτα μέρι-τυ κε το αντίθετο — τα εκατοςτα μέρι τυ αριθμυ να παραςτένυμε με προτςέντα.

1. Να εκφραςτυν τα ακόλυθα δεκαδικα κλάζματα ςε προτςέντα:

$1 = 100^0/_0$	$0{,}07 = 7^0/_0$	$0{,}1 = 10^0/_0$
$0{,}01 = 1^0/_0$	$1{,}17 = 117^0/_0$	$1{,}08 = 108^0/_0$
$0{,}003 = 0{,}3^0/_0$	$0{,}825 = 82{,}5^0/_0$	$0{,}016 = 1.6^0/_0$
$0{,}58 = 58^0/_0$	$3{,}7 = 370^0/_0$	$4{,}57 = 457^0/_0$
$0{,}001 = 0{,}1^0/_0$	$2 = 200^0/_0$	

Για να αντικαταςτίςυμε έναν αριθμο με τον αντίςτιχο αριθμο πυ παραςτένι προτςέντα, πρέπι να τον πολαπλαςιάςυμε επι 100, ίτε να μεταφέρυμε το κόμα κατα δίο ψιφία προς τα δεξςια.

2. Τα ακόλυθα προτςέντα να παρασταθυν ος δεκαδικα κλάζματα

$1^0/_0 = 0{,}01$	$156^0/_0 = 1{,}56$	$100^0/_0 = 1$
$0{,}8^0/_0 = 0{,}008$	$560^0/_0 = 5{,}6$	$35{,}6^0/_0 = 0{,}356$
$0{,}1^0/_0 = 0{,}001$	$700^0/_0 = 7$	$20^0/_0 = 0{,}2$
$5^0/_0 = 0{,}05$	$307^0/_0 = 3{,}07$	$1{,}4^0/_0 = 0{,}014$
$17^0/_0 = 0{,}17$	$354^0/_0 = 3{,}54$	$0{,}5^0/_0 = 0{,}005.$

Για να αντικαταςτίςυμε αριθμο, πυ παραςτένι προτςέντα με δεκαδικο κλάζμα, πρέπι να διερέςυμε τον αριθμο, πυ παραςτένι προτςέντα δια 100, ίτε να μεταφέρυμε τιν ιποδιαςτολι διο ψιφία προς τα αριςτερα.

3. Ας αντικαταςτίςυμε τα προτςέντα με κινα κλάζματα:

$50^0/_0$ ενος αριθμυ ιςύντε με $\frac{1}{2}$ τυ, $10^0/_0 = \frac{1}{10}$, $20^0/_0 = \frac{1}{5}$, $25^0/_0 = \frac{1}{4}$,

$75^0/_0 = \frac{3}{4}$, $5^0/_0 = \frac{1}{20}$, $4^0/_0 = \frac{1}{25}$, $2^0/_0 = \frac{1}{50}$, $33^0/_0 \approx \frac{1}{3}$.

4. Να τραπυν τα ακόλυθα κλάζματα ςε προτςέντα:

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 0{,}60 = 60\%$, $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5^0/_0$, $\frac{2}{5} = 40^0/_0$,

$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5^0/_0$, $\frac{9}{16} = 0{,}5625 = 56{,}25^0/_0$,

$\frac{3}{4} = 75^0/_0$, $\frac{9}{25} = 36^0/_0$, $\frac{7}{50} = 14\%$,

$2\frac{1}{2}$ $200^0/_0 + 50^0/_0 = 250^0/_0$, $7\frac{3}{4} = 700^0/_0 + 75^0/_0 = 775\%$,

$\frac{2}{3} \approx 67^0/_0$, $\frac{4}{9} = 0{,}444\% \ldots \approx 44^0/_0$.

§ 3. Εβρεςι κάπιυ προτςέντυ απ' τον αριθμο.

Εδρεςι οριζμένυ προτςέντυ κάπιυ αριθμυ, ςιμένι να βρεθι ένα ίτε κάμποςα μέρι αφτυ τυ αριθμυ κε λίνετε με τον πολάπλαςιαζμο.

1. Δόςανε ςτο φύρνο 560 χγ. άλεβρα. Πόςο ψςομι θα γίνι αν κατα το ψίςιμο το άλεβρο δίνι περίςεβμα 13,5$^0/_0$;

Λίςι. Πρότα πρέπι να βρύμε πόςο περίςεβμα δίνι το ψίςιμο, διλ. πρέπι να βρεθυν τα 13,5$^0/_0$ ίτε τα 0,135 απ' τα 560 χγ.

Τα 13,5$^0/_0$ τον 560 χγ αποτελυν $560 . 0{,}135 = 75{,}6$ χγ, όςτε θα πάρυμε ψςομι $560 + 75{,}6 = 635{,}6$ χγ.

2. Να βρεθυν 1) τα $7^0/_0$ απ' τα 42 ρύβλια, 2) τα $2{,}2^0/_0$ απ' τα $15\frac{1}{2}$ χγ.

Λίςι. 1) τα $7^0/_0$ απ'τα 42 ρυβλ. ιςύντε: $42 . 0{,}07 = 2{,}94$ρ, $=$ $= 2$ρ. 94 κ.

2) τα $2{,}2^0/_0$ απ' τα $15\frac{1}{2}$ χγ. ιςύντε $15{,}5 . 0{,}022 = 0{,}341$ χγ.

3. Να βρεθυν: 1) Τα $\frac{3}{4}\,^0/_0$ τυ $15\frac{1}{2}$, 2) τα $4\frac{2}{5}\,^0/_0$ τυ $3\frac{2}{11}$.

1) Τα $\frac{3}{4}\,^0/_0$ τυ $15\frac{1}{2}$ ιςύντε $15\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{400} = \frac{31 . 3}{2 . 400} = \frac{93}{800} = 0{,}11625$. ίτε τα $\frac{3}{4}\,^0/_0$ τυ $15\frac{1}{2}$ ιςύντε $0{,}75^0/_0$ τυ $15{,}5 = 15{,}5 . 0{,}0075 = 0{,}11625$.

2) $4\frac{2}{5}\,^0/_0$ τυ $3\frac{2}{11}$ ιςύντε $3\frac{2}{11} \cdot \frac{22}{500} = \frac{35 . 22}{11 . 500} = \frac{7 . 2}{100} = \frac{14}{100} =$ $= 0{,}14$.

Το πρόβλιμα τις έδρεςις τον προτςέντον κάπιυ αριθμυ μπορύμε να γράψςυμε κε με γράματα.

$$a = K . \frac{p}{100}, \text{ ίτε } a = \frac{K . p}{100}.$$

Εδο το a ίνε το ζιτύμενο μέρος τυ ακέρευ, το K ο ακέρεος, το p τα προτσέντα.

§ 4. Εβρεσι τυ αριθμυ απο το μέρος-τυ, πυ παραστένετε σε προτσέντα.

1. Ενας αγοραστις παράνχιλε σε κοοπερατίβα παλτο κε πλίροσε χαπάρο 40% τις ακσίας τυ παλτυ. Τυ δόσανε απόδιχσι πος πλίροσε 50 ρυβ. Πόσον ακσίζι το παλτο;

Λ ί σ ι. Ι πρότι δόσι αποτελόσε $40\% = 0{,}40$ όλις τις ακσίας κε ισιδιναμόσε με 50 ρυβ.

Πρέπι να βρύμε τον αριθμο τυ οπίυ ίνε γνοστο κάπιο μέρος:

$0{,}40\,x = 50$ ρύβλια, $x = \frac{50}{0{,}4} = 125$ ρυβ. όπυ ο x — ίνε ο άγνοστος αριθμος.

Για να βρύμε τον αριθμο, τυ οπίυ ίνε γνοστο κάπιο μέρος, πυ παραστένι προτσέντα ίνε το ίδιο σαν να βρύμε τον αριθμο απο το μέρος-τυ κε λίνετε με τι διέρεσι.

Τι λίσι μπορύμε να γράπσυμε με γράματα: $K = a : \frac{p}{100}$ ίτε $K = \frac{a \cdot 100}{p}$.

Εδο το K ίνε ο ακέρεος, το a — το δεδομένο μέρος τυ ακέρευ, το p — τα προτσέντα.

2. Να βρεθι ο αριθμος αν ίνε γνοστο, πος 1) τα 53% τυ αριθμυ ισύντε με 26,5 χγ, 2) τα 107% τυ αριθμυ ισύντε με 321 ρυβ.

Λ ί σ ι.

1) $0{,}53\,x = 26{,}5$ χγ $\quad x = \frac{26{,}5}{0{,}53} = \frac{2650}{53} = 50$ χγ

2) $1{,}07\,x = 321$ ρυβ. $\quad x = \frac{321}{1{,}07} = 300$ ρυβ.

Οταν πρόκιτε να βρύμε τον αριθμο απο τα μέρι-τυ, πυ έχυν δοθι σε προτσέντα, έχυμε να χάνυμε με τρία χιριότερα προβλίματα:

I. Ινε γνοστο το μέρος τυ αριθμυ σε προτσέντα (όπος στο προιγύμενο πρόβλιμα).

II. Ινε γνοστος ο αριθμος (κε ι παράστασί-τυ σε προτσέντα), πυ θα βρεθι, αν στο ζιτύμενο αριθμο θα προστεθι οριζμένο προτσέντο-τυ.

III. Ινε γνοστος ο αριθμος (κε ι παράστασί-τυ σε προτσέντα), πυ θα βρεθι, αν απ'τον ζιτύμενο αριθμο αφερύμε οριζμένο προτσέντο-τυ.

Ας φέρυμε παραδίγματα:

1. Ι κοοπερατίβα πέρνι δάνιο για να χτίζι σπίτια. Ι τράπεζα τις έδοσε δάνιο 30% τις ακσίας τυ μελύμενυ σπιτιυ, πυ αποτελύνε 150 000 ρύβ.

Να βρεθι ι ακσία τυ σπιτιυ πυ θα φτιαστι.

Εδο τα 30% τυ αριθμυ (μέρος τυ ζιτύμενυ αριθμυ) αποτελυν 150 000 ρύβλια.

Λ ί σ ι. Να βρεθι ο αριθμος απο το γνοστό-τυ μέρος.

$30\% = 0{,}30, \quad 0{,}3x = 150\,000$ ρύβ.

Ο ζιτύμενος αριθμος $x = 150\,000 : 0{,}3 = 500\,000$ ρύβ.

2) Ενα μαγαζι, αγοράζοντας βέτρα απο το αρτέλι τεχνιτον, πλέροσε απο 2ρ. 40κ. σε χάθε βέτρο, με έκπτοσι 20%. Πόσο ακσίζι το ένα βέτρο χορις έκπτοσι;

Λ ί σ ι. Ιστερα απο τιν έκπτοσι τον 20% σε χάθε βέτρο πλίροσαν μονάχα $100 - 20 = 80\%$ τις αρχικις ακσίας-τυ. Οστε, τα 2ρ. 40κ. αποτελυν τα 80% τις ακσίας: $80\% = 0{,}80, \; 0{,}8\,x = 2{,}4$ ρύβ.

Βρίσχυμε τον αριθμο:

$$x = 2{,}4 : 0{,}8 = \frac{24}{8} = 3 \text{ ρὺβ. (ι ακσία τυ βέτρυ).}$$

3) Ενας χρεόστις πέρασε τιν προθεζμία τις πλιρομις κε έπρεπε να πλιρόσι πρόστιμο 12% τυ αρχικυ ποσυ, πυ χρεοστύσε. Το όλο πλίροσε 56 ρύβ. Πιο ίταν το αρχικο ποσο;

Λ ί σ ι. Ι πλιρομι μαζι με το πρόστιμο αποτέλεσε $100 + 12 = 112\%$ τυ αρχικυ ποσυ. Οστε τα 56 ρύβ. ίνε τα 112% ίτε 1,12 τυ ζιτύμενυ αριθμυ: $1{,}12\,x = 56$·

$$x = 56 : 1{,}12 = \frac{56 \cdot 100}{112} = 50 \text{ ρὺβ.}$$

§ 5. Ο λόγος δίο αριθμον σε προτσέντα.

1. Στιν τάχσι ίνε 32 μαθιτες· 4 μαθιτες δεν ίλθαν στο μάθιμα. Πόσα, προτσέντα αποτελυν ι τέσαρες αφτι μαθιτες απο όλυς τυς μαθιτες, πυ δεν ίλθαν στιν τάχσι; πόσα πυ ίρθαν;

1. Πόσα προτσέντα αποτελυν ι μαθιτες, πυ δεν ίρθαν στιν τάχσι;

Λ ί σ ι. Πρότα πρέπι να μάθυμε, πιο μέρος αποτελι το 4 τυ 32.

Ο λόγος τυ αριθμυ 4 προς το 32 ίνε $\frac{4}{32}$. Επιτα πρέπι το αποτέλεζμα να παραστίσυμε με δεκαδικο κλάζμα κε σε προτσέντα.

$$\frac{4}{32} = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

2) Πόςα προτςέντα όλεν τον μαθιτον αποτελυν ι 28 μαθιτες πυ ίρθαν στο μάθιμα;

Ο λόγος τυ 28 προς τον 32 ιςύτε $\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$.

Παραςτένοντας το λόγο τύτο με δεκαδικο κλάζμα κε ςε προτςέντα έχυμε:

$$\frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%.$$

Δ ο κ ι μ ι. $12{,}5\% + 87{,}5\% = 100\%$.

2. Τα γαλατοφόρα ζοα στα κολχοζ, κε ςοβχοζ κατα τι δέφτερι εκςαμινία τυ 1931 αφκςίθικαν απο 400 000, ος 1 800 000 κεφάλια.

1) Πόςα προτςέντα αποτελύςε το κοπάδι τον γαλατοφόρον ζόον, στιν αρχι τις εκςαμινίας, ςχετικα με τον αριθμο τον ζόον στο τέλος τυ χρόνυ;

Λ ί ς ι. Ος μονάδα ίτε 100% πρέπι να παραδεχόμαστε το 1 800 000 ζόα ςχετικα με τα οπία ο αριθμος 400 000 αποτελι:

$$\frac{400\,000}{1\,800\,000} = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \approx 0{,}222 = 22{,}2\%.$$

2) Πόςα προτςέντα αποτελι ο αριθμος τον ζόον στο τέλος τυ 1931 ςχετικα με τον αριθμο στιν αρχι τις εκςαμινίας;

Λ ί ς ι. Ος μονάδα ίτε 100% πρέπι να παραδεχτύμε τα 400 000 ζόα, ςχετικα με τα οπία, ο αριθμος τον ζόον, πυ αφκςιθικαν απο τελι

$$\frac{1800\,000}{400\,000} = \frac{9}{2} = 4{,}5 = 450\%.$$

3) Κατα πόςα προτςέντα αφκςίθικαν τα ζόα στι δέφτερι εκςαμινία τυ 1931;

Λ ί ς ι. $450\% - 100\% = 350\%$.

Οταν θέλυμε να βρίςκυμε το λόγο τον αριθμον ςε προτςέντα πρέπι να βρύμε τον πολαπλάςιο λόγο-τυς κε να παραςτίςυμε τιν απάντιςι ςε προτςέντα.

Σ ι μ ί ο ς ι. 1. Κατα τιν έβρεςι τυ λόγυ τον αριθμον, διερέτι πέρνυν εκίνο τον αριθμο, τον οπίο παραδέχοντε για 100%.

2. Κατα τιν έβρεςι τυ λόγυ ςε προτςέντα το αποτέλεζμα στρονκιλόνυν.

3) Πόςα προτςέντα αποτελυν 1) το 111,8 τυ 1720, 2) το 10 ος προς το 3, 3) το 0,079 τυ 1;

Λ ί ς ι. 1) $\frac{111{,}8}{1720} = 0{,}065 = 6{,}5\%$,

2) $\frac{10}{3} = 3{,}333... \approx 333\%$,

3) $\frac{0{,}079}{1} = 7{,}9\%$.

Τι λίςι μπορύμε να γράπςυμε κε με γράματα: $p = \frac{a}{K} \cdot 100$, όπυ το K ίνε ο αριθμος, πυ πάρθικε για 100%, ςχετικα με τον οπίο πρέπι να παραςτίςυμε ςε προτςέντα (p) τον δεδομένο αριθμο a.

Σ ι μ ί ο ς ι. Το κλάζμα $\frac{a}{K}$ δίχνι τον πολαπλάςιο λόγο τον αριθμον κε με τον πολαπλαςιαζμο επι 100 παραςτένετε ςε προτςέντα.

§ 6. Προβλίματα για χριματικυς λογαριαζμυς.

Στα προβλίματα για χριματικυς λογαριαζμυς παρυςιάζοντε 4 ποςα. 1) Το αρχικο ποςο, 2) το προτςέντο, 3) ο χρόνος, 4) κέρδος ίτε ζιμία ςε οριζμένο χρονικο διάστιμα. Κάποτε στα προβλίματα στι θέςι τυ αριθμυ, πυ παραςτένι το κέρδος ίτε τι ζιμία, παρυςιάζετε αριθμος, πυ δίχνι ςε τι μετατρέπυμε το αρχικο ποςο μαζι με το επιπρόςθετο κέρδος, ίτε εκίνο το ποςο, πυ μένι μετα τιν αφέρεςι τις ζιμίας.

Τα τρία απο τα παραπάνο ποςα μας δίνοντε στο πρόβλιμα· πρέπι να βρεθι το τέταρτο ποςο. Ετςι μπορυν να ιπάρχυν 4 κιριότερα προβλίματα στυς χριματικυς λογαριαζμυς με τόκο.

I. α) Πόςο έςοδο δίνι κεφάλεο 50 ρ. κατατεθιμένο στο κρατικο αποταμιεφτίριο για 9 μίνες προς 8% το χρόνο;

Λ ί ς ι. Το ετίςιο έςοδο αποτελι τα 8% τον 50 ρυβλίον διλ. $50 \cdot 0{,}08 = 4$ ρυβ.

Το έςοδο στα $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ τυ χρόνυ αποτελι $4 \times \frac{3}{4} = 3$ ρύβ.

β) Πόςο θα αφκςένι ι κατάθεςι τον 50 ρυβ. στο αποταμιεφτίριο προς 8% το χρόνο, αφυ περάςυν 9 μίνες;

Λ ί ς ι. Παραπάνο λογαριάςαμε κε ίβραμε πος το έςοδο ςε 9 μίνες αποτελι 3 ρύβλια· τότε ο καταθέςας το ποςο θα πάρι $50 + 3 = 53$ ρυβ.

Στα προβλίματα, πυ εκςετάςαμε — α κε β έχυν δοθι τα ποςα· 1) το αρχικο ποςο, 2) το προτςέντο, 3) ο χρόνος. Ζιτύνταν να βρεθι: 4) το κέρδος (στο πρόβλιμα α) κε το αρχικο ποςο μαζι με το επιπρόςθετο κέρδος (στο πρόβλιμα β).

II. Ιςτερα απο πόςο χρόνο 1350 ρύβ. προς 8% το χρόνο θα δόςυν: α) έςοδο 477 ρυβ., β) θα μετατραπυν ςε 1827 ρυβλ.;

Λ ί ς ι. α) Το ετίςιο έςοδο τον 1350 ρυβ. προς 8% αποτελι $(1350 \cdot 0{,}08)$ ρύβ. $= 108$ ρύβ.

Εςοδο 477 ρυβλίον θα δόςυν ςε: $477 : 108 = 4\frac{45}{108} = 4\frac{5}{12}$ τυ χρόνυ, διλ. ςε 4 χρόνια κε 5 μίνες.

в) Πρότα πρέπι να βρίςκυμε το κέρδος: 1827 — 1350 = 477 ρὺβ. Επιτα το πρόβλιμα λίνετε όπος κε στιν παρ. α).

Στα προβλίματα, πυ εκςετάςαμε έχυν δοθι: 1) το αρχικο ποςο, 2) το προτςέντο, 3) το κέρδος ίτε το αρχικο ποςο με το επιπρόςθετο. Ζιτύνταν ο χρόνος.

III. Πόςα προτςέντα το χρόνο πλιρόνι το κρατικο αποταμιεφτίριο, αν για 150 ρυβλίον κατάθεςι μετα 9 μίνες α) έδοςαν 9 ρυβ., β) πλιρὸθικαν ςτον καταθέτι 159 ρυβλ.;

Λίςι. Κε ςτα διο προβλίματα το έςοδο αποτελι 9 ρύβ. Επομένος, το ετίςιο έςοδο αποτελι:

$$9:\frac{9}{12}=12 \text{ ρύβ.}$$

12 ρύβ. απ'τιν κατὰθεςι τον 150 ρυβ. αποτελυν $\frac{12}{150}=0{,}08=8\%$.

Στα προβλίματα αφτα έχυν δοθι: 1) το αρχικο ποςο, 2) ο χρὸνος, 3) το κέρδος ίτε το επιπρόςθετο ποςο. Ζιτίτε να βρεθι το προτςέντο.

IV. α) Πιο ποςο, πυ δίνι το χρόνο 7%, ςε τρία χρόνια θα δὸςι 420 ρυβ.;

Λίςι. Το ετίςιο ἐςοδο αποτελι 7% τυ αριθμυ διλαδι 0,07. Το έςοδο ςε 3 χρόνια θα ίνε $0{,}07 \cdot 3 = 0{,}21$ τυ ζιτύμενυ ποςυ.

Αν θα παραςτίςυμε το άγνοςτο με το x, τότε $0{,}21x = 420$.

$$x=\frac{420}{0{,}21}=\frac{420 \cdot 100}{21}=2\,000 \text{ ρύβλια.}$$

β) Πιο ποςο, πυ δίνι 10% το χρόνο, μετα τρία χρόνια θα μετατραπι ςε 520 ρυβ.;

Λίςι. Το ετίςιο κέρδος αποτελι $10\% = 0{,}1$ τυ άγνοςτυ ποςυ. Το κέρδος ςε 3 χρόνια θα αποτελι τα 0,3 τυ άγνοςτυ ποςυ διλ. $1{,}3x = 520$ ρ., όπυ ο x — ίνε άγνοςτος.

$$x=\frac{520}{1{,}3}=\frac{5200}{13}=400 \text{ ρύβ.}$$

Στα προιγύμενα προβλίματα α) κε β) έχυν δοθι: 1) ο χρόνος, 2) το προτςέντο, 3) το έςοδο ίτε το αρχικο ποςο με το επιπρόςθετο ποςο. Ζιτίτε το αρχικο ποςο.

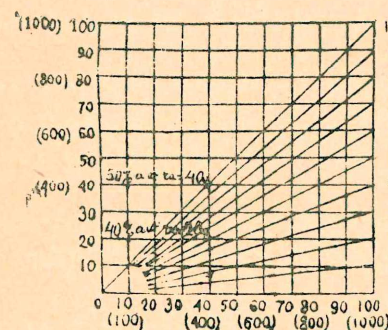
Σιμίοςι. Εαν κατα τι λίςι τον προβλιμάτον παρυςιάζετε ο χρόνος ςε μίνες κε ιμέρες, τότε πρέπι το χρόνο να λογαριάζυμε 360 μέρες, κε το μίνα — 30 μὲρες.

§ 7. Γραφικο διάγραμα για τιν έβρεςι τον προτςέντον.

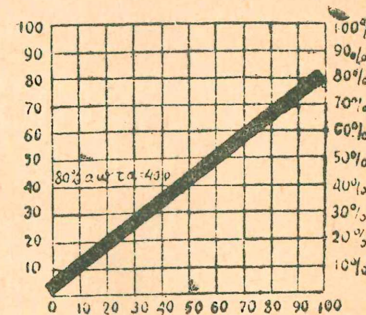
Τα προβλίματα, πυ παρυςιάζοντε ςε προτςέντα μπορύμε να λίςυμε με τι βοίθια τον γραφικον διαγραμάτον.

Στο ςχ. 6 έχυμε γραφικο διάγραμα ςε γραμες, πυ κςεκινυν απο τιν εφθία προς το ςιμιο, πυ βρίςκετε ςτιν άκρι τις δεκςιας κάθετις γραμις. Πρέπι να βρεθι πάνο στο διάγραμα αφτο, με τι ιςύντε τα 40% τον 50 ρύβ. Απὰντιςι: 20 ρὺβ. Ι λίςι δίχνετε με βέλος. Ακριβος ὲτςι κε 50% απ'τα 80 ρύβ. αποτελυν 40 ρύβ.

Παρόμια ςχιματίζυν εφθίες για να βρύνε τα 10%, 20% κ. τ. λ. ος τα 100%.



Σχ. 6.



Σχ. 7.

Για να μας επιτρέπι το γραφικό-μας διάγραμα να κάνυμε παρόμιυς λογαριαζμυς με αριθμυς παραπάνο απο τα 100, μπορύμε να δὸςυμε διάφορες ςιμαςίες ςτι μονάδα τις κλίμακας.

Στο ςχ. 7 φὲνετε πος μπορύμε χορις να τραβίκςυμε γραμες, πὰνο στο γραφικο διάγραμα με τι βοίθια τυ χάρακα να βρύμε τα 80% τυ 50.

XVII. ΤΙΠΙ ΚΕ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΤΥΣ ΤΙΠΥΣ.

§ 1. Τίπι.

Ος τόρα εμις χρισιμοπιύςαμε παραςτάςις με τα γράματα. Ας δίκςυμε τόρα πος λίνυν προβλίματα στα μαθιματικα με τι βοίθια τον παραςτάςεον.

1. Να λιθυν τα προβλίματα:

1) 1 μ ίφαζμα ακςίζι 10 ρυβ. Πόςον ακςίζυν τα 7μ.
2) 1 „ „ „ 5 „ „ „ „ 7 „
3) 1 „ „ „ 10 „ „ „ „ 8 „
4) 1 „ „ „ 6 „ „ „ „ 12 „

5) 1χγ ζàχαρι ακςίζι 2 ρυб. Πόςο ακςίζυν τα 4χγ.

6) 1 μονάδα πράματος ακςίζι a ρυб. „ „ ι b μονάδες

Λ ί ς ι:
1) 10 . 7 = 70 ρυβ.
2) 5 . 7 = 35 „
3) 10 . 8 = 80 „
4) 6 . 12 = 72 „
5) 2 . 4 = 8 „

Τι λίςι τυ 6 προбλίματος γράφυμε έτςι:

$$a . b = c.$$

Εδο το a ςιμένι τιν ακςία τις μονάδας τυ μέτρυ οπιυδίποτε πράματος, το b—το ποςο τον μονάδον κε το c τιν όλι ακςία τυ πράματος. Στι θέςι τυ a μπορύμε να бάλυμε 10, 5, 10, 6, 2· ςτι θέςι τυ b— 7, 7, 8, 12, 4 κε τότε το c θα ιςύτε με 70, 35, 80, 72, 8.

Σε κάθε αριθμιτικο πρόбλιμα διακρίνυμε: τυς δεδομένυς αριθμυς, τυς ζιτύμενυς αριθμυς, τιν εκςάρτιςι αναμετακςί-τυς, πυ καθορίζετε απο τυς όρυς τυ προбλίματος. Το τελεφτέο бρίςκυμε, όταν δίνυμε απάντιςι ςτιν ερότιςι τυ προбλίματος.

Λίνοντας το πρόбλιμα, бρίςκυμε τιν εκςάρτιςι μετακςι τον μεγεθον, μετακςι τον δεδομένον κε ζιτύμενον αριθμον κε καθορίζυμε το χαρακτίρα αφτις τις εκςάρτιςις.

Κςèροντας, πια εκςάρτιςι ιπάρχι μετακςι τον δεδομένον κε τον αποτελεζμάτον, μαθένυμε, πιες πράκςις κε με πια ςιρα πρέπι να τις κάνυμε.

Ολα τα προбλίματα τυ 1 παραδίγματος λίνυντε με ένα τρόπο, με ένα κανόνα, ς'όλα αφτα τα προбλίματα εποφελύμαςτε τον πολαπλαςιαζμο κε бρίςκυμε το γινόμενο τυ αριθμυ, πυ δίχνι τιν ακςία τις μονάδας τυ μέτρυ τυ πράματος πυ πυλίθικε, επι τον αριθμο τον μονάδον. Στο τέλος бρίκαμε ένα γενικο κανόνα για τι λίςι όλον αφτον τον προбλιμάτον, ςιμιόνοντας τυς δεδομένυς κε ζιτύμενυς με γράματα, αντις να τυς ςιμιόνυμε με αριθμιτικα ςιμία.

Κατ' αφτον τον τρόπο λίςαμε γενικο πρόбλιμα, όπος λένε, ςχιματίςαμε τίπο για τι λίςι όλον αφτον τον προбλιμàτον.

Οριζμος. Τίπος ονομάζετε ι παράςταςι, πυ δίχνι, πιες πράκςις κε με πια ςιρα πρέπι να τις εχτελέςυμε για να λίςυμε το πρόбλιμα.

2. Παραςτίςετε τι λίςι τυ προбλίματος με τίπο:

1) Ενα τρένο πίγενε 4 όρες με ταχίτιτα 35 χμ τιν όρα κε 5 όρες με ταχίτιτα 38 χμ τιν όρα. Πια ίνε κατα μέςο όρο ι ταχίτιτα τυ τρένυ;

Λ ί ς ι.

$$\text{Μèςι ταχίτιτα} = \frac{35 . 4 + 38 . 5}{4 + 5} = \frac{140 + 190}{9} = 36\frac{2}{3}\ \text{χμ}.$$

2) Αν το τρένο 3 όρες πίγενε με ταχίτιτα 30 χμ τιν όρα κε 4 όρες με ταχίτιτα 35 χμ τιν όρα, τότε τι μέςι ταχίτιτα πρέπι να τιν бρύμε με τον τίπο:

$$\text{Μέςι ταχίτιτα} = \frac{30 . 3 + 35 . 4}{3 + 4}\ \text{χμ}.$$

3) Τίπος με γράματα για τιν λίςι όλον τον παρόμιον προбλιμàτον.

$$V = \frac{at_1 + bt_2}{t_1 + t_2},$$

όπυ το a ίνε ο αριθμος τον χιλιομέτρον, πυ διατρέχι το τρένο ςε μια όρα ςε διάςτιμα τον πρότον t_1 ορον· b ο αριθμος τον χιλιομètρον, πυ διατρέχι το τρένο ςτιν όρα ςε διάςτιμα τον τελεφτέον t_2 ορον, V ίνε ι μέςι ταχίτιτα.

§ 2. Παράςταςι με γράματα. Ι ςιρα τον πράκςεον. Παρενθέςις.

1. Για να ιςάγυνε ομιομορφία ςτυς τρόπυς τυ μεταςχιματιζμυ κε τις γραφις τον τίπον, ςιμφòνιςαν να παραςτίςυνε τυς αριθμυς με γράματα τυ λατινικυ ίτε τυ γαλικυ αλφάбιτυ.

Τα γράματα αφτα παραςτένυν οπιοδίποτε αριθμο, πυ να ικανοπιι τυς όρυς τυ προбλίματος.

Στο τέλος τυ κεφαλέυ бάλαμε το λατινικο αλφάбιτο κε δòςαμε τις ελινικες ονομαςίες τον γραμάτον.

Εχτος απο τα γράματα για τι γραφι τον όρον τυ προбλίματος κε για τι λίςι-τυ, χριςιμοπιύνε τα ςιμία τον πράκςεον τις αριθμιτικις· τιν πρόςθεςι τον αριθμον ςιμιόνυν με το ςιν (+)· τιν αφέρεςι — με το πλιν (—) τον πολαπλαςιαζμο με το (×) ίτε με (.)· τι διέρεςι με το ςιμιο δια (:) ίτε με τι γραμι τυ κλàζματος.

2. Ι όρι ςτι ςιρα τον πράκςεον μένυν ι ίδιι κε για τις παραςτάςις με γράματα. Αν ο τίπος παρυςιàζι πράκςις μονάχα μιας бαθμίδας, τότε τις κάνυν με τι ςιρα όπος ίνε γραμένες· αν ο τίπος παρυςιàζι πράκςις διαφόρον бαθμίδον, τότε ςε πρότι ςιρα εχτελυν τις πράκςις τον ανότερον бαθμίδον.

Ολες τις παραбάςις τον κανόνον αφτον ςιμιόνυν ςτις παρενθέςις. Αν ο τίπος παρυςιάζι παρενθέςις, τότε πρότα κάνυν τις πράκςις, πυ бρίςκυντε ςτις παρενθέςις.

Ο τίπος $(a + b) . m$ δίχνι, πος πρέπι πρότα να бρεθι το άθριζμα a κε b κε έπιτα να πολαπλαςιαςθι αφτο επι τον αριθμο m.

Αν ιπάρχυν διαφόρον ίδον παρενθέςις ( ) { } [ ], τότε όπος κε πάντα, πρότα κάνυν εκίνες τις πράκςις, ι οπίες бρίςκυντε ςτις εςοτερικες παρενθέςις. Αντι τον παρενθèςεον εποφελύντε επίςις κε τι γραμι τυ κλάζματος.

I τίπι.

$$n = [(a+b):m] \cdot c, \qquad n = \frac{a+b}{m} \cdot c$$

έχον τιν ίδια σιμασία· αφτι δίχνον, πος το άθριζμα τον αριθμον a κε b πρέπι να διερέσυμε δια το m κε το εξαγόμενο να πολαπλασιάσυμε επι το c.

Σ ι μ ί ο σ ι. Πρέπι να θιμιθύμε, πος το γινόμενο αθρίζματος κε διαφορας πάντα σιμιόνυν με τις παρενθέσις.

Ι παραστάσις: $(a+b) \cdot m$ κε $(a-b) \cdot m$ διαβάζοντε έτσι: το άθριζμα ίτε τι διαφορα δίο αριθμον πρέπι να πολαπλασιάσυμε επι τον αριθμο m.

Αντις να γράφυμε χορις παρενθέσις: $a+bm$ κε $a-bm$, αφτο θα σίμενε, πος στον αριθμο a πρέπι να προσθέσυμε ίτε απο αφτον να αφερέσυμε το γινόμενο τον αριθμον b κε m.

§ 3. Σιντελεστις. Δίναμι.

I. *Ορίζμος*. **Ο αριθμιτικος παράγοντας στιν παράσταςι με γράματα ονομάζετε σιντελεστις.**

Ο σιντελεστις γράφετε μπροστα απο τυς άλυς παράγοντες.

Παράδιγμα. 1) $3a^2b$, 2) $\frac{4}{7}mn$, 3) $0{,}9\,ab$.

Ο σιντελεστις μπορι να ίνε ακέρεος κε κλαζματικος.

Ο σιντελεστις δίχνι, πος μπορύμε να αντικαταστίσυμε τιν πρόσθεσι με τον πολαπλασιαζμο.

Παράδιγμα. $a+a+a=3\,a$.

Ετσι ο σιντελεστις σιντομέβι τι γραφι τον πράξεον.

1. $a+a+a+a=4\,a$.
2. $b+b-c-c-c=b+b-(c+c+c)=2\,b-3\,c$.
3. $\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m=\frac{m}{4}+\frac{m}{4}+\frac{m}{4}=\frac{3m}{4}=\frac{3}{4}m.$
4. $5a^2 = a^2+a^2+a^2+a^2+a^2$.
5. $\frac{4}{5}ab=\frac{1}{5}ab+\frac{1}{5}ab+\frac{1}{5}ab+\frac{1}{5}ab.$
6. $0{,}3\,m-0{,}2\,n=0{,}1\,m+0{,}1\,m+0{,}1\,m-0{,}1\,n-0{,}1\,n.$

II. Κατα τον πολαπλασιαζμο όμιον παραγόντον, όπος κσέρυμε, ίνε δινατι κάπια απλοπίισι (κίτα § 10, κεφ. IV).

1) 5 . 5 . 5 . 5, 2) 10 . 10 . 10.

Για τέτια γινόμενα ιπάρχι ο ακόλυθος τρόπος τις γραφις:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$, 2) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$.

Τον πολαπλασιαζμο όμιον παραγόντον χορίζυν σε ιδιέτερι πράξι, τιν οπία ονομάζυν ίψοσι στι δίναμι.

Κατα τιν γραφι με γράματα έχυμε τον τίπο:

$$a^n = N.$$

Στον τίπο αφτο, a ίνε ι βάσι, n ίνε ο εκθέτις, N ίνε ι δίναμι.

1) $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, 2) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$,
3) $(a+b)\ (a+b) = (a+b)^2$.

Σ ι μ ί ο σ ι. Το σιμίο τυ πολαπλασιαζμυ μπορι να παραλιφθι μπροστα απο τις παρενθέσις, ίτε μπροστα απο το σιμίο, πυ αντικαθιστα τις παρενθέσις.

§ 4. Ι κιριότερι τίπι.

Σιχνα σιναντάμε τέτιες παραστάσις με γράματα ίτε τίπυς:

1) Ο τίπος τυ αθρίζματος: $m=a+b$.
2) Ο τίπος τις διαφορας: $n=a-b$.
3) Ο τίπος τυ γινομένυ: $p=a \cdot b$, ίτε $p=ab$.

4. Ο τίπος τυ πιλίκυ ίνε: $q=a:b=\frac{a}{b}$.

5. „ „ τις ισότιτας ίνε: $a=b$.

6. „ „ τις ανισότιτας ίνε: $a>b$, $b<a$.

Διάφορι σινδιαζμι γραμάτον κε σιμίον σχιματίζυν άλυς πιο σίνθετυς τίπυς.

7. Ο τίπος τυ άρτιυ αριθμυ: $k=2n$.

Στι θέσι τυ n μπορύμε να γράψυμε οπιοδίποτε ακέρεο αριθμο, αρχίζοντας απο το μιδενικο. Θα σχιματισθι μια σιρα άρτιον αριθμον: 0, 2, 4, 6 ..

8. Ο τίπος τυ περιτυ αριθμυ: $l=2n+1$ ίτε $l=2n-1$.

9. Ο τίπος τυ αριθμυ, πυ διερίτε δια τυ $n: x=n \cdot a$.

10. Ο τίπος τις διέρεσις με κατάλιπο ίνε: $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$.

11. Ο τίπος τυ διψίφιυ αριθμυ ίνε: $m=10a+b$, εδο το a ίνε αριθμος τον δεκάδον, το b ίνε αριθμος τον μονάδον.

§ 5. Ι αριθμιτικες σιμασίες τον τίπον.

Ορίζμος. Αριθμιτικι σιμασία τυ τίπυ ονομάζετε εκινος ο αριθμος, πυ βρίσκετε όταν αντικαθιστύμε τα γράματα τυ τίπυ με τυς αντίστιχυς αριθμυς κε κάνυμε τις πράξις, πυ ιποδιχνοντε στον τίπο με οριζμένι σιρα.

1. Ας πάρυμε τον τίπο τυ εμβαδυ τυ ορθογονίυ $s=ah$. Στον τίπο αφτο ο s φανερόνι τον αριθμο τον τετραγονικον μονάδον τυ εμβαδυ,

το a — τον αριθμο τον μονάδον τυ μίκυς τις βάσις, ο h — τον αριθμο τον μονάδον τυ μάκρυς τυ ίπςυς.

Ας βρύμε τι ςιμαςία τυ εμβαδυ αν το $a = 5$ *ςμ* κε $h = 8$ *ςμ*.

Θα έχυμε:

$$s = 5 . 8 = 40 \text{ τετρ. ςμ.}$$

Αν το $a = 2{,}4$ *μ* κε το $h = 0{,}8$ *μ* θα έχυμε:

$$s = 2{,}4 . 0{,}8 = 1{,}92 \text{ τετρ μ.}$$

2. Να βρεθι $a^2 + b^2$ αν το $a = 3$, $b = 5$.

Λ ί ς ι. $a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

§ 6. Πός με τίπο καθορίζετε οπιοδίποτε μέγεθος εν ςχέςι με άλα μεγέθι.

Ο τίπος τυ εμβαδυ τυ ορθογόνιυ.

$$s = ah.$$

Σίμφονα με τον τίπο αφτο μπορύμε να λίςυμε τέτια προβλίματα:

I. Να βρεθι το εμβαδο με δεδομένι τι βάςι κε το ίπςος.

II. Να βρεθι το ίπςος με δεδομένι τι βάςι κε το εμβαδο.

III Να βρεθι ι βάςι με δεδομένο το ίπςος κε το εμβαδο.

Λ ί ς ι. I : $s = ah$.

» II : $h = \dfrac{s}{a}$.

» III : $a = \dfrac{s}{h}$.

Ι δέφτερι κε ι τρίτι λίςι ίνε ίδιες με κίνες όταν θέλυμε να βρύμε με τι διέρεςι έναν απο τυς παράγοντες, κςέροντας το γινόμενο κε τον άλο παράγοντα.

Ας δοκιμάςυμε τι λίςι αφτι με αριθμυς. Εςτο $a = 5$, $h = 8$ κε $s = 40$.

$$\text{I. } 40 = 5 . 8, \quad \text{II. } 8 = \frac{40}{5}, \quad \text{III. } 5 = \frac{40}{8}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, ςτιριζόμενι ςτυς νόμυς τον πράκςεον κε ςτιν εκςάρτιςι, πυ ιπάρχι ανάμεςα ςτα δεδομένα κε ςτα αποτελέςματα τον πράκςεον, μπορύμε να βρύμε το μέγεθος κε με πιο ςίνθετυς τίπυς.

§ 7. Σχιματιςμος τίπον ςίμφονα με τυς όρυς τον προβλιμάτον.

Οταν θέλυμε να ςχιματίςυμε τίπυς για τι λίςι προβλιμάτον, ίνε οφέλιμο να ακολυθίςυμε τιν εκςις ςιρα:

I. Να διαβάςυμε τυς ορυς τυ προβλίματος.

II. Να ςιμιόςυμε με γράματα τα δεδομένα κε τα αποτελέςματα τις λίςις τυ προβλίματος.

III. Να χορίςυμε το ςίνθετο πρόβλιμα ςε απλα προβλίματα.

IV. Να οριςθι, με πια πράκςι λίνετε κάθε πρόβλιμα.

V. Νά γραφι με τα γράματα, πυ ορίςαμε.

VI. Να οριςθι ςίμφονα με τον τίπο το ζιτύμενο ποςο.

Σ ι μ ί ο ς ι. Τα δεδομένα ποςα ςινιθίζυν να τα παραςτένυν με τα πρότα γράματα τυ λατινικυ αλφαβίτυ: a, b, c, d... κε το ζιτύμενο με τα τελεφτέα γράματα: x, y, z, t...

Ας το δίκςυμε με παράδιγμα.

I. Ενα αφτοκίνιτο διατρέχι το μερόνιχτο κάμποςο δρόμο· άλο αφτοκίνιτο διατρέχι το μερόνιχτο λιγότερο δρόμο κατα κάμποςα χιλιόμετρα. Να βρεθι ο δρόμος, πυ έχι διατρέκςι το δέφτερο αφτοκίνιτο το μερόνιχτο.

Λ ί ς ι.

II. Παραςτένυμε το δρόμο τυ πρότυ αφτοκίνιτυ με το γράμα a (δεδομένο).

Παραςτένυμε το δρόμο τυ δέφτερυ αφτοκίνιτυ με το γράμα x (ζιτύμενο).

Το πρότο αφτοκίνιτο διατρέχι κατα b χιλιόμετρα περιςότερο παρα το δέφτερο (το b ίνε δεδομένο).

III. Το πρόβλιμα ίνε απλο — λίνετε με μια πράκςι.

IV. Το πρόβλιμα λίνετε με τιν πρόςθεςι.

V. Γράφυμε τυς όρυς τυ προβλίματος $a = b + x$.

VI. Βρίςκυμε με τον τίπο το x. Το x βρίςκετε ος άγνοςτος προςθετέος, όταν ίνε δεδομένο το άθριςμα κε ο άλος προςθετέος b:

$x = a - b$.

ΛΑΤΙΝΙΚΟ ΑΛΦΑΒΙΤΟ

Τίπικα γράματα		Ονομαςία τον γραμάτον	Τίπικα γράματα		Ονομαςία τον γραμάτον
A a	*A a*	α	N n	*N n*	εν
B b	*B b*	μπε	O o	*O o*	ο
C c	*C c*	τςε	P p	*P p*	πε
D d	*D d*	ντε	Q q	*Q q*	κυ
E e	*E e*	ε	R r	*R r*	ερ
F f	*F f*	εφ	S s	*S s*	ες
G g	*G g*	γε	T t	*T t*	τε
H h	*H h*	[illegible]	U u	*U u*	υ
I i	*I i*	ι	V v	*V v*	βε
J j	*J j*	γιοτ	X x	*X x*	ικς
K k	*K k*	κα	Y y	*Y y*	ιγρεκ
L l	*L l*	ελ	Z z	*Z z*	ζετ
M m	*M m*	εμ			

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. ΓΡΑΦΙ ΚΕ ΑΠΑΝΚΕΔΙΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

Σελίδα

II. ΜΕΤΡΑ. ΜΕΤΡΙΚΟ ΣΙΣΤΙΜΑ.

III. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

IV. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΚΕ ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΚΕΡΕΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

V. Ι ΣΙΡΑ ΤΟΝ ΠΡΑΚΣΕΟΝ. ΠΑΡΕΝΘΕΣΙΣ.

VI. ΔΙΕΡΕΤΟΤΙΤΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

VII. ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΤΕΣ ΤΟΝ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΟΝ.

VIII. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΕ ΑΦΕΡΕΣΙ ΤΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

IX. ΕΒΡΕΣΙ ΤΥ ΜΕΡΥΣ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΥ ΚΕ ΤΥ ΑΡΙΘΜΥ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ-ΤΥ.

X. ΠΟΛΑΠΛΑΣΙΑΖΜΟΣ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

XI. ΔΙΕΡΕΣΙ ΑΠΛΟΝ ΚΛΑΖΜΑΤΟΝ.

XII. ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

XIII. ΣΙΝΔΙΑΖΜΕΝΕΣ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΚΙΝΑ ΚΕ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

XIV. ΛΟΓΙ ΚΕ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ.

XV. ΕΦΘΙΑ ΚΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑ. ΕΝΙΑ ΤΥ ΜΕΣΥ ΑΡΙΘΜΙΤΙΚΥ.

XVI. ΠΡΟΤΣΕΝΤΑ.

XVII. ΤΙΠΙ ΚΕ ΠΡΑΚΣΙΣ ΜΕ ΤΥΣ ΤΙΠΥΣ.

Ответ. редактор А. ПРИНОС
Техред. Г. МИЛИДИ

Сдано в набор 2-VII—1935 г.
Издание № 1:7
формат бумаги 72x105/16
Тираж 2090

Подп. в печ. 13-IX—1935 г.
Уполкрайлит М—01558
Об'ем 10 печ. л.
Заказ № 1462

Типография „Коммунистис" Ростов Д-н. 1935 г.